

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 1
augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 21,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Wat is een verhouding?

A.F. VAN TOOREN

Leusden

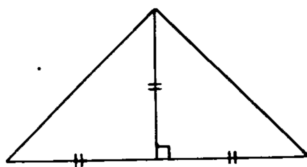
1 Inleiding

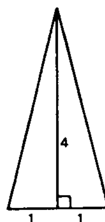
Het begrip 'verhouding' heeft een nederige plaats in onze schoolwiskunde. Het is op zijn best een stuk gereedschap, dat de leerlingen op de basisschool hebben leren gebruiken. Wij nemen aan, dat zij het met begrip gebruiken; in de schoolboeken is tenminste weinig te vinden, waarmee dat begrip gevoed zou kunnen worden.
Toch is het begrip verhouding beslist niet onbelangrijk! Het speelt een rol bij gelijkvormigheid en in de goniometrie (?), bij vectoren en hun richtingen, bij differentiaalvergelijkingen. En hoe vaak zeggen we niet: de enige wiskunde, die 'ze' in de onderbouw natuurkunde nodig hebben, is die van de verhoudingen en evenredigheden?
Bovendien ondergaat het begrip verhouding in de loop van de schoolcursus een kleine, maar vrij ingrijpende wijziging. Die alleen al maakt het mijns inziens nodig er eens wat aandacht aan te besteden. Waarvan dit artikel het resultaat is . . .

2 Het prille begin

We kiezen als arbeidsterrein dat van de basisschool: de verzameling $\mathbb{N}^+$ van de positieve, gehele getallen. We weten wel, dat het getal nul ook een rol speelt op de basisschool, maar dat is een ondergeschikte. In de voorliggende beschouwingen speelt nul daarentegen een min of meer dramatische rol. Daarom gunnen we deze acteur een eigen entree!
We kunnen nu spreken over de verhouding van twee of meer van die positieve, gehele getallen. Ter wille van de overzichtelijkheid beperken we ons tot tweetallen.
Een eerste observatie is nu, dat dit *geordende* tweetallen moeten zijn. Want, bij wijze van voorbeeld, slechts één van de twee onderstaande gelijkbenige driehoeken achten wij de eigenschap te hebben dat

> de lengten van basis en hoogtelijn dezelfde verhouding hebben als de getallen 2 en 1.





De op te stellen definitie zal er van moeten getuigen, dat verhoudingsgetallen geordende paren zijn.
In de tweede plaats vinden wij dat sommige geordende paren 'dezelfde' verhouding hebben als andere. Bijvoorbeeld hebben de getallen 4 en 2 dezelfde verhouding als de getallen 2 en 1. Ook daarvan zal onze definitie moeten getuigen.
Dit tweede feit betekent, wiskundig gezien, dat we een bepaalde relatie hanteren van de verzameling $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ van al die geordende paren naar zichzelf. Deze relatie '. . . heeft dezelfde verhouding als . . ." stel ik voorlopig voor door het symbool ∇. Ik schrijf dus bijvoorbeeld

$$(4,2) \nabla (2,1).$$

Er zijn twee gelijkwaardige manieren om diezelfde relatie scherp te omschrijven. We kunnen stellen

Voor alle geordende paren (a,b) en (c,d) uit $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ betekent

$(a,b) \nabla (c,d)$

dat er een getal k is zo, dat $c = ka$ en $d = kb$.

Maar we kunnen in plaats daarvan ook stellen

. . . dat $ad = bc$.

De eerste formulering heeft bepaalde nadelen. Bij symbolisering van de taal is er een kwantor bij vereist! Maar hinderlijker is, dat die k ons dwingt buiten ons arbeidsterrein te stappen:

$$(4,6) \nabla (6,9) \text{ omdat } 6 = 1\tfrac{1}{2} \times 4 \text{ en } 9 = 1\tfrac{1}{2} \times 6.$$

Hierboven had dus 'eigenlijk' moeten staan

. . . dat er een positief rationale k is zo, dat . . .

Een voordeel van die eerste formulering is echter, dat we er een gemakkelijke overstap mee kunnen maken naar de verhouding van geordende drietallen, viertallen, en zo verder.

Bij nadere bestudering van de relatie ∇ blijkt al heel gemakkelijk, dat hij de volgende drie eigenschappen heeft:

(1) ∇ **is reflexief**:
Voor elk element (a,b) uit $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ geldt
$(a,b) \nabla (a,b)$.

(2) ∇ **is symmetrisch**:
Voor elk tweetal paren (a,b) en (c,d) geldt
$(a,b) \nabla (c,d) \Leftrightarrow (c,d) \nabla (a,b)$

(3) ∇ **is transitief**:
Voor elk drietal paren (a,b), (c,d) en (e,f) geldt
$(a,b) \nabla (c,d) \wedge (c,d) \nabla (e,f) \quad \Rightarrow (a,b) \nabla (e,f)$

Dit zijn de drie kenmerkende eigenschappen van ekwivalentie-relaties, zodat onze ∇ (gelukkig) een ekwivalentie is!
Op grond van deze ekwivalentierelatie ∇ wordt $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ nu opgesplitst in ekwivalentieklassen. Binnen één zo'n klasse is elk tweetal geordende paren ekwivalent. In plaats van '(4, 6) heeft dezelfde verhouding als (6, 9)' zouden we dus nu kunnen zeggen '(4, 6) behoort tot dezelfde ekwivalentieklasse als (6, 9)'.

Wiskundig gezien is de enige zinvolle definitie van het begrip verhouding nu de volgende

> Voor elke $a \in \mathbb{N}^+$en elke $b \in \mathbb{N}^+$ verstaan we onder 'de verhouding van a en b, of van het paar (a, b)' die ekwivalentieklasse van de relatie ∇ waar (a, b) toe behoort.

Natuurlijk wil dit niet zeggen, dat we het zo aan onze leerlingen zouden moeten 'verkopen'! Tegenover hen kunnen wij volkomen tevreden zijn, indien zij op adekwate wijze kunnen handelen met het begrip 'gelijkheid van verhoudingen'. Daarvoor is het niet nodig, dat zij ook precies weten wat een verhouding 'sec' is.
Tot slot van deze paragraaf nog enkele opmerkingen over een mogelijke andere benadering van het begrip verhouding.
De hierboven gebruikte ekwivalentierelatie ∇ wordt namelijk ook nog op een geheel andere manier toegepast in de wiskunde:

> In de verzameling van alle symbolen $\frac{x}{y}$ met x en y uit $\mathbb{N}^+$ definiëren we een ekwivalentierelatie ∇. Voor elk tweetal van die symbolen $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ betekent $\frac{a}{b} \nabla \frac{c}{d}$, dat $ad = bc$.

De ekwivalentieklassen heten nu positieve rationale getallen! En weer opnieuw stellen we ons tegenover onze leerlingen tevreden met het kunnen handelen met 'gelijkheid van symbolen'; scherp kunnen definiëren wat een positief rationaal getal is, dat is te veel gevergd.
Op de vraag 'wat is een verhouding? ' krijgt men nu vaak het antwoord:

de verhouding van a en b is eigenlijk precies hetzelfde als het rationale getal $\frac{a}{b}$.

En gezien het bovenstaande is daar niets tegen in te brengen. Nog niet, tenminste! Zodra we de sleutelacteur 0 laten optreden, dan wordt dat anders.
Toch bekruipt ons ook nu al een onrustig gevoel bij de vraag of je twee verhoudingen bij elkaar kunt optellen, met elkaar vermenigvuldigen. En we schrijven dan wel, denkende aan de identificatie van verhoudingen met positieve rationale getallen

3 : 5, voor 'de verhouding van 3 en 5',

maar er is iets in ons dat zich verzet tegen

$3 : 5 + 2 : 7 = 31 : 35$,

hoewel dit toch een volkomen correcte mededeling is. Of is dit een volkomen persoonlijk gevoel van mij?

3 Uitbreiding

Tot nu toe hebben we als arbeidsterrein gekozen de verzameling van de positieve, gehele getallen. Nu gaan we echter een poging wagen om de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen als arbeidsterrein te kiezen. Dat daar wel wat aanleiding toe is, blijkt bijvoorbeeld uit een beslist niet ongebruikelijke zin zoals

bij een tekendriehoek verhouden de zijden zich als 1, 1 en $\sqrt{2}$.

Naar aanleiding van dit en soortgelijke voorbeelden zou men nog kunnen bepleiten uitsluitend de positieve reële getallen toe te laten. Maar laten we ons storten in het roekeloze avontuur àlle reële getallen toe te laten, ook de negatieve, ook die wonderlijke joker die we nul noemen! We gaan dus onderzoeken of het zinvol mogelijk is te spreken over zulke vreemde zaken als

de verhouding van $-\sqrt{2}$ en 0,
de verhouding van 0 en 0.

Daartoe definiëren we eerst weer onze relatie, die we gemakshalve maar ∇ blijven noemen:

Voor alle geordende paren (a,b) en (c,d) uit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
betekent $(a,b) \nabla (c,d)$, dat $ad = bc$.

Deze relatie is weer reflexief en symmetrisch. Maar helaas is het droevig gesteld met de transitiviteit! Bijvoorbeeld geldt

$$(5,3) \nabla (0,0) \wedge (0,0) \nabla (2,7)$$

terwijl toch beslist $(5,3) \nabla (2,7)$ beslist niet waar is!

De conclusie is dus, dat we ons begrip verhouding *niet* kunnen uitbreiden tot het reële gebied. En dat roept dan de vraag op of er een maximale deelverzameling van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is te noemen, waarin die uitbreiding nog net wèl mogelijk is. Het antwoord daarop luidt, dat we slechts het paar $(0, 0)$ behoeven op te geven en niets meer dan dat:

> Voor alle geordende paren (a,b) en (c,d) uit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ betekent $(a,b) \nabla (c,d)$
> – dat $ad = bc$; dit is gelijkwaardig met
> – dat er een $k \neq 0$ bestaat zo, dat $c = ka$ en $d = kb$.

Nu is ∇ wèl een ekwivalentierelatie en we kunnen daardoor verhoudingen weer definiëren als ekwivalentieklassen, die door die ekwivalentierelatie geïnduceerd worden.

Het is goed zich er rekenschap van te geven dat binnen deze uitbreiding van het begrip verhouding identificatie met getallen niet meer mogelijk is. Dit heeft een nare konsekwentie, die ik hierop terloops wil aanstippen om er dan in een volgende paragraaf uitvoeriger op terug te komen.
Men kan heel goed zeggen

> De verhouding van 3 en 0 is dezelfde als die van 5 en 0

en binnen de ad-hoc-notatie van dit artikel schrijven we daarvoor

$$(3, 0) \nabla (5, 0).$$

Het gebruik van de 'oude' notatie met het deelteken :, dat immers te maken heeft met die identificatie van verhoudingen met getallen, leidt nu echter tot iets onaanvaardbaars:

$$3 : 0 = 5 : 0.$$

4 Wenselijkheid van de uitbreiding

In een coördinatenvlak bestuderen we bij elk van de oorsprong verschillend punt P de verhouding van zijn coördinaten x_P en y_P Op de coördinaat-assen liggen punten, waarvan één van die twee coördinaten gelijk is aan 0. We hanteren dus hierbij het 'uitgebreide' begrip verhouding uit de vorige paragraaf.

We stellen ons nu de vraag, wat de meetkundige betekenis is van het hebben van dezelfde (of gelijke) coördinatenverhouding. Het antwoord is:

> Als de (van de oorsprong verschillende) punten P en Q gelijke coördinatenverhouding hebben, dan liggen P en Q op één lijn door de oorsprong, en omgekeerd.

Er is dus een bijectie van de verzameling van alle lijnen door de oorsprong naar de verzameling van alle verhoudingen. En omdat die lijnen door de oorsprong de richtingen in het vlak representeren is er dus ook een bijectie van de verzameling van alle richtingen naar de verzameling van alle verhoudingen. Het is nu nog maar een heel kleine stap van hier naar de definitie:

> Onder de 'richtingsverhouding' van een lijn p verstaan we de verhouding van $x_P - x_Q$ en $y_P - y_Q$, waarin P en Q verschillende punten van p en verder willekeurig zijn.

Het is goed te bedenken, dat in de analytische meetkunde het begrip 'richting' in verband gebracht werd met 'richtingscoëfficiënt' en dat dit op een gebrekkige manier gebeurde, noodgedwongen. Lijnen, die de richting van de y-as hebben, bezaten geen richtingscoëfficient. Vandaar uitspraken zoals

> 'De lijnen p en q zijn evenwijdig, is gelijkwaardig met 'de richtingscoëfficiënten van p en q zijn gelijk of ontbreken allebei'.

Het is wat eleganter, in die specifieke zin die alleen aan ons, wiskundigen, bekend is, om te zeggen

> . . . is gelijkwaardig met 'p en q hebben dezelfde richtingsverhouding'.

Nu is de analytische meetkunde zo goed als verdwenen uit onze schoolpraktijk. Maar wat is er voor in de plaats gekomen? Daarbij denk ik dan uitsluitend aan onderwerpen, waarin het begrip 'richting' een rol speelt.
De vectoren dringen zich dan als eerste naar voren in de gedachten. Hanteren we die op het meetkundige gebied, nog vóór er sprake is van (lineaire) afhankelijkheid, dan spreken we ook vaak over hun richting:

> Waaraan kan je zien dat de vectoren $\binom{3}{5}$ en $\binom{-6}{-10}$ evenwijdig zijn, ook zonder ze te tekenen? Juist, de verhouding van 3 en 5 is dezelfde als die van -6 en -10!
> Hoe zit het nu met de vectoren $\binom{2}{0}$ en $\binom{3}{0}$? Zijn die ook evenwijdig? Waarom dan?

Verderop in de cursus ontmoeten we soortgelijke situaties, waarin we ook nauwelijks onder die 'uitgebreide' verhoudingen uit kunnen, in de differentiaalvergelijkingen:

We bekijken de differentiaalvergelijking

$$(x - 2)dx = (y + 3)dy.$$

Van het lijnelement in het punt (4, −1) wil ik de richtingscoëfficient weten. Goed zo, die is 1. Nu in het punt (2, 5). De richtingscoëfficient is 0, het lijnelement heeft de richting van de x-as. Tenslotte is het punt (7, −3). Wat zeg je, geen richtingscoëfficient? En wat zou dat dan?
U ziet het, ook hier geeft het begrip 'richtingsverhouding' een welkome unificatie van ons doen en laten!
Kijkende naar deze twee voorbeelden, waarvan de taal opzettelijk in de stijl van 'verhoudingen zonder nullen' gehouden is, zie ik daarin een pleidooi voor het volgende:

> Daar, waar in de klassen de verhoudingen 'met nullen' een rol gaan spelen of kunnen gaan spelen, is het ook wenselijk ze inderdaad te gebruiken.

5 Nomenclatuur en notaties
Bent u het eens met het voorgaande, dan is daarvan onvermijdelijk het gevolg dat u op enig tijdstip in de cursus een nieuwe notatie voor verhoudingen nodig hebt.
Omdat die notatie door alle leerlingen van het voortgezet onderwijs bij de vectoren gebruikt kan worden (de differentiaalvergelijkingen spelen pas later een rol en zijn niet voor alle leerlingen bestemd), zou het prettig zijn als hij 'past' bij de vectornotatie.
Ik stel daarom voor om 'de verhouding van a en b' te schrijven als

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

De bijbehorende schrijfwijze van evenredigheden wordt dan

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vóór men 'de nullen invoert' kan natuurlijk de notatie met het teken : goed gebruikt worden. Maar het lijkt niet erg zinvol om de leerlingen dingen aan te leren, die ze later weer àf moeten leren. Dus: naar mijn mening zou deze notatie gebruikt moeten worden zodra verhoudingen genoemd en gebruikt worden.
Dit artikel sluit ik af met een schot voor de boeg.
Op grond van traditie (?) spreken we nog altijd over 'goniometrische verhoudingen'. Wat moet nu een leerling met enig taalgevoel denken bij een formule zoals

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B?$$

Wat vindt u van:

> sin A is een verhouding en cos B is er ook één. Dus is sin A cos B het produkt van twee verhoudingen, net zoals cos A sin B trouwens. Zou het produkt van twee verhoudingen zelf ook weer een verhouding zijn? Het zal wel, want als je die dingen optelt komt er sin(A + B) uit en dat is per slot van rekening ook een verhouding!

Alom wordt er gepleit voor een zo eenvoudig mogelijk taalgebruik in onze schoolwiskunde. Zou het dan geen zin hebben om in plaats van 'goniometrie' voortaan 'hoekmeetkunde' te gaan zeggen? En wat dacht u van het gebruik van 'hoekfuncties' en 'cirkelfuncties' voor de sinus en zijn soortgenoten, min of meer naar Duits voorbeeld? We zouden het woord 'hoekfuncties' kunnen gebruiken als verzamelnaam voor sinus, cosinus en tangens, opgevat als functies van de verzameling van alle hoeken (hoekgrootten) naar $\mathbb{R}$. En dan de 'cirkelfuncties' zien als functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, natuurlijk.

Het is maar een idee, natuurlijk, zoals trouwens ook de rest van dit verhaal!

Hoe vertel ik het mijn leerlingen?

H. W. VAN TILBURG
Oosterhout (NB.)

Voor de eerste maal is de gehele havo-wereld geconfronteerd geworden met de examens wiskunde-nieuwe-stijl. Zullen, zoals te doen gebruikelijk, de opgegeven vraagstukken een meer of minder gerechtvaardigde kritiek opgeroepen, ongetwijfeld zal in verschillende kringen ook de geheel nieuwe examenopzet geëvalueerd gaan worden. In dit artikel zal voorbij gegaan worden aan de moeizame besprekingen die er tussen eerste en tweede correctoren kunnen hebben plaatsgevonden; elke leraar heeft nu eenmaal binnen het voorgeschrevene zijn eigen interpretatie van de normen. Hoewel ik niet voorbij wil gaan aan het pijnlijke geval dat een enkel puntje meer of minder uiteindelijk kan beslissen over het ja dan nee toelaten, het al of niet opleggen van een herexamen met alle nare gevolgen van dien, wil ik toch vooral de aandacht vestigen op een kwestie die fundamenteler is.
Het ligt niet in de bedoeling hier het examenwerk ter discussie te stellen; het zal echter graag als uitgangspunt genomen worden voor enkele kritische kanttekeningen.

Vraagstuk A 1
Gevraagd wordt bij gegeven lijn- en cirkelvergelijking de lengte van de afgesneden koorde te bepalen, waarbij voor de *berekening* van de coördinaten van de snijpunten P en Q vier punten kunnen worden toegekend.
Hoewel in vraagstukken heel vaak een tekening niet expliciet gevraagd wordt, stel ik in mijn lespraktijk een tekening steeds verplicht. Het geeft immers gedurende de gehele bewerking gelegenheid tot controle van het berekende. I.p.v. de leerlingen echter in het keurslijf van een vast oplossingspatroon te dwingen, juich ik het ten zeerste toe wanneer via het gebruik van grafieken een kortere oplossing wordt aangeboden. In het onderhavige geval kunnen de coördinaten gemakkelijk worden afgelezen, waarna *controle door substitutie in beide vergelijkingen* een sluitende oplossingsmethode geeft.
De tweede corrector meende evenwel in eerste instantie (na bij meerdere collega's advies ingewonnen te hebben) deze oplossing als foutief te moeten aanmerken, omdat

a een grafische oplossingsmethode in deze gevallen verboden is;
b duidelijk bij de normen vermeld staat dat voor de *berekening* van P en Q 4 punten kunnen worden toegekend.

Ergo: vele van mijn kandidaten kregen al bij het eerste onderdeel 4 punten in mindering. De eerste klap is een daalder waard.
Duidelijk wil ik daarom de vraag stellen: 'Staat ergens in het examenreglement dat grafische oplossingsmethoden verboden zijn en zo ja voor welke gevallen geldt dit verbod dan wel?'.

Bij deze laatste zinsnede denk ik vooral aan de vraagstukken:

A 2b: Voor welke p heeft de vergelijking $f(x) = p$ precies drie verschillende oplossingen?.
Schrijver dezes kan zich niet voorstellen dat hier bedoeld is, dat in $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = p$ de waarde van p bepaald moet gaan worden op algemeen theoretische grondslagen en wel uit de eis dat deze vergelijking twee enkelvoudige en één dubbele wortel moet bezitten.
Conclusie: de oplossing moet uit de grafiek worden afgelezen.

A 4b: Voor welke x-waarden geldt dat $g(x) > f(x)$, d.i. $-\cos 2x < \sin (x - \frac{1}{4}\pi)$ vooraf zijn in A 4a beide grafieken getekend.
M.i. is het hier een algemeen aanvaard principe dat de oplossing na de snijpuntenberekening uit de grafieken mag worden gelezen. 'Moderne wiskunde' beveelt dit dan ook als één van de mogelijke oplossingsmethoden aan.
Conclusie: bij dit type vraagstukken is gebruik van de grafieken toegestaan.

A 6b: Noem de elementen van $W = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 < 2x \wedge 2 \leqq 2x - y < 6\}$
Op de gebruikelijke wijze worden deze elementen wederom uit het getekende gebied afgelezen.

Graag vestig ik er nog de aandacht op dat - in tegenstelling tot mijn praktijk m.b.t. vraagstuk A1 - in de laatst gegeven drie voorbeelden de oplossingen niet meer 'algebraïsch worden gecontroleerd.

Vanwege het grote belang van sluitende voorschriften wil ik het probleem echter nog dwingender stellen.
In een schrijven van januari 1973, gericht aan de rectoren/directeuren van de scholen voor havo en namens het college van inspecteurs van het a.v.o. ons toegestuurd door Drs. W. E. de Jong en Drs. B. J. Westerhof, staat te lezen op blad 2 onder artikel 8:

> De opdracht 'Teken in één figuur de grafieken van f en g' houdt mede in dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch wordt opgelost.

Een ieder zal wel begrepen hebben wat hier mee bedoeld is. Toch heb ik in mijn lespraktijk steeds toegestaan, dat deze waarden uit de grafieken werden afgelezen *en op hun juistheid werden gecontroleerd.* Verschillende van mijn kandidaten hebben dan ook de waarden $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{7}{12}\pi$ via aflezing en controle gevonden.
Kost hen dit dan drie punten?
Mag ik het mijn leerlingen - die bovendien nog voor het grootste percentage natuurkunde in hun vakkenpakket hebben gekozen en dientengevolge getraind zijn in het aflezen van de nodige gegevens uit de gegeven grafieken - euvel duiden dat ze de weg in het bos van voorschriften kwijt raken?
Daarom toch mijn vraag: 'Wat wordt nu exact bedoeld met *algebraïsch* oplossen?'.
Wanneer een kandidaat schrijft:

$$-\cos 2x = \sin(x - \frac{1}{4}\pi) \wedge x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi$$

dan zal deze oplossing waarschijnlijk wel verkregen zijn door een heimelijk aflezen en moet dus als van geen waarde worden afgevoerd. Hij had dan de vergelijking maar voldoende 'algebraïsch' moeten oplossen. Maar wat moet ik dan bij een onderzoek naar evenwijdigheid van een lijn met een vlak, hetgeen vaak leidt tot

de vraag of er een k en l bestaat zódanig dat:

$$\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}$$

Een handige leerling 'ziet' meteen dat $l = 1$, $k = 2$ voldoet. Moet deze leerling dan bestraft worden omdat hij niet het platgetreden paadje bewandelt van de 'algebraïsche' oplossing van lineaire combinatie of substitutie?

Om tenslotte in deze de verwarring compleet te maken: de normering van A 6b. In totaal konden hiervoor 7 punten worden toegekend, die echter volledig werden opgesoupeerd voor het tekenen van de parabool (2), de beide lijnen (2) en de elementen van W (3). Waar blijft hier de honorering voor de snijpunten van de lijnen met de parabool? Of is het de bedoeling dat bij alle verwarring, zoals hierboven geschetst, ook nog eens wordt aangeleerd, dat wel bij grafieken van functies, maar niet bij andere figuren de snijpunten 'algebraïsch' moeten worden bepaald. Ik vraag me dan wel af of de norm dan veranderd zou zijn als i.p.v. $y^2 = 2x$ gegeven zou zijn geweest $x^2 = 2y$, want dan zouden er (voor alle kandidaten ondubbelzinnig) drie grafieken van functies hebben gestaan; een gegeven waar ze nog eens duidelijk in vraag A 6a 'Is V een functie' op attent zouden zijn gemaakt.

Mijn voorstel is in deze daarom a.v.:

a Bij alle vraagstukken is een *sluitende* (controle) grafische oplossing toegestaan; (het alternatief: een lange lijst van ge- en verboden).

b Worden de snijpunten vereist, dan wordt dit ofwel impliciet in de vraagstelling opgenomen ($f(x) < g(x)$) ófwel expliciet in een vraag uitgedrukt.

Het gevaar dat alle algebraïsche oplossingsmethoden worden verwaarloosd kan gemakkelijk worden ondervangen door regelmatig snij- of raakpunten met b.v. de coördinaten $(2\sqrt{7},\ 3\sqrt{7} - 4)$ in de opgaven te verwerken.

Vraagstuk A 2a

Teken de grafiek van $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ op het interval $-1 \leqq x \leqq 3$.

Mijn lespraktijk - en naar ik vermoed ook wel de meeste methoden - is in deze gericht op het onderzoek naar het domein, nulpunten, tekenverloop van de afgeleide, extreme waarden, horizontale en/of vertikale asymptoten.

Naar aanleiding van boven reeds genoemde brief, blad 2, artikel 8 het volgende:

a Onderzoek naar het domein, nulpunten en extreme waarden worden daarin niet genoemd. De normering van vraagstuk A 2a laat echter over deze eisen naar onderzoek van nulpunten en extreme waarden niet de minste twijfel bestaan: 5 punten.

b Wél wordt daarin vereist: '. . . *voor zo ver mogelijk* . . . het tekenschema van $f(x)$'. Opgave A 2a leent zich uitstekend voor dit onderzoek; $f(x) = x^2(x-2)^2$. Waar blijft echter de honorering voor dit deelonderzoek? De te verdienen 10 punten zijn alle al vergeven.

c In vraagstuk A 4a staat - op de meervoudsvorm na - woordelijk de opdracht die in dit schrijven onder artikel 8 vermeld staat. Eisen deze grafieken dus wederom een onderzoek naar nulpunten, afgeleide etc.etc.? Of mogen deze worden afgeleid uit de grafieken van cos x en sin x door spiegeling, translatie en lijnvermenigvuldiging? Zo ja, hetgeen ik afleid uit de veel lagere normering t.o.v. vraagstuk A 2a, op welke gronden vervalt dan hier dit artikel 8?

Het zou bij mij geen verbazing hebben gewekt als een der opdrachten betrekking zou hebben gehad op een kwadratische functie. Mag de daarbij behorende grafiek nu wél via nulpuntsbepaling en de daarlangs berekende symmetrieas worden afgeleid of moet per se de gehele boven genoemde familie weer komen opdraven? Het valt niet moeilijk dit artikel 8 tot in het absurde door te voeren: de functie $f(x) = 3x + 6$ zal voor zijn grafiek aanzienlijk meer werk gaan vragen dan tot nu toe gebruikelijk; de functie $g(x) = 3$ zal het bewijs eisen dat er een horizontale asymptoot in het spel is.

Levensgroot blijft daarom de vraag staan: 'Op welke functies heeft dit artikel 8 betrekking?'.

Vraagstuk A 4a

Tenslotte als afsluiting een eenvoudiger probleem.

Zoals reeds vermeld spelen bij de collega's natuurkunde de grafieken een belangrijke rol. Het eerste probleem dat zich hierbij steeds aandient is de aanpassing van de eenheden op de X- en Y-as opdat er een redelijke figuur geproduceerd kan worden. In de wiskundelessen speelt dit probleem niet zo sterk door, al kunnen de goniometrische functies vanwege irrationele verhoudingen natuurlijk voor onaangename verrassingen zorgen.

Mijn derde en laatste vraag luidt daarom:

'Staat ergens in het examenreglement vermeld dat noodzakelijk de eenheden op beide assen gelijk moeten worden genomen?'.

Het zal de lezer niet moeilijk vallen mijn antwoord op boven gestelde vragen uit de tekst af te leiden. Nog gemakkelijker is echter na te rekenen dat bovenstaande kwesties kunnen leiden tot een verschil van meer dan 10 punten in de honorering, waardoor een 7 (66) zelfs kan afzakken naar een 5 (54).

Laat ik duidelijk stellen dat uiteindelijk in een zeer prettige bespreking de punten van mijn kandidaten zijn vastgesteld. Toch is het juist deze bespreking geweest die me gesterkt heeft in mijn mening dat verschillende eisen te vaag zijn geformuleerd; er wordt te veel overgelaten aan de interpretatie van de individuele leraar, hetgeen ik hopelijk duidelijk door bovenstaande - wat overtrokken - voorstelling van zaken heb aangetoond.

Mij is dan ook het geval bekend, dat door verharding van standpunten tenslotte alle punten door middeling tot stand zijn gekomen, hetgeen nawijsbaar een kandidaat tot een herexamen veroordeelde.

Ik kan er alle begrip voor opbrengen dat een beroep in deze niet mogelijk is en dat ingeval beide correctoren elkaar niet kunnen vinden de weg van de middeling moet worden gekozen. Wanneer echter de gevolgen zo diep kunnen doorwerken vraagt dit m.i. van de desbetreffende commissie een duidelijke omschrijving van de eisen en dit dan wel op zeer korte termijn. Niet alleen wordt daardoor voorkomen dat onze kandidaten worden overgeleverd aan een tweede corrector die onrechtmatige eisen gaat stellen, maar tevens weet dan elke leraar hoe hij het zijn leerlingen in het nu aankomende schooljaar moet gaan vertellen.

Naschrift van de redactie

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren organiseert op 15 september 1973 te Utrecht een bijeenkomst voor mavo en voor havo/vwo, waar de examens 1973 besproken zullen worden.

Tevens worden vier regionale bijeenkomsten gehouden van 15.00-17.30 uur
op 28 september te Rotterdam en Zwolle
op 5 oktober te Eindhoven en Haarlem
waar het examenprogramma wiskunde voor havo en vwo en de interpretatie daarvan bespreking vormen.
Op deze vergaderingen zal een vertegenwoordiger van de inspectie aanwezig zijn.
De redactie van Euclides spreekt de verwachting uit dat eventuele problemen die bij de leden over deze zaken leven, zoals in het bovenstaande artikel er enige besproken worden, bij één van de heren De Jong, Westerhof of Zimmerman van te voren schriftelijk worden ingediend.

I.O.W.O.

Door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs is een brochure uitgegeven onder de titel: *Wiskunde in het l.b.o., een startpunt voor leerplanontwikkeling.*

In een boekwerk van ruim 300 pagina's zijn een aantal basisideeën t.a.v. wiskunde-onderwijs voor deze kategorie van onderwijs neergelegd, alsmede een ruime bron van leerstofeenheden.
Deze leerstofeenheden bevatten naast de omschrijving van een stukje leerstof voorbeelden uit binnen- en buitenlandse leergangen.
Tevens zijn enkele 'trajekten' door deze leerstofeenheden aangegeven en is een organisatorisch en inhoudelijk uitzicht op een vervolg gegeven.

Met deze brochure hoopt het I.O.W.O. een eerste aanzet te geven tot homogenisering en hernieuwde doordenking van het wiskunde-onderwijs in het l.b.o.
Het is dan ook de bedoeling om deze brochure aan te bieden aan en te bespreken met 'mede-ontwikkelaars' die plannen hebben om vernieuwd wiskunde-onderwijs in het l.b.o. te realiseren.
Het is tevens een aanduiding van de richting waarin het I.O.W.O. gaat zoeken, een richting waarin U misschien ook de blik wilt wenden - of liever nog - waarin U mee op weg wilt gaan.
Daarom wil het I.O.W.O. de geïnteresseerden in de gelegenheid stellen deze brochure te bestellen tegen de kostprijs van f 11,- per exemplaar (inklusief portokosten).
U kunt uw bestelling schriftelijk of telefonisch doorgeven aan het I.O.W.O., afdeling l.b.o., Tiberdreef 4 te Utrecht (telefoon 030-611611 toestel 40).

Strategieën nader bekeken

C. VAN SCHAGEN
Leusden

In het artikel: Richtlijnen betreffende onderwijsresearch (Euclides, **46,** aug./sept. 1970, p. 12) *werd reeds gesproken over strategieën. In dit artikel wordt de hantering van dit begrip nader uitgewerkt. Voor een goed verstaan van wat gezegd gaat worden is het zeer gewenst het genoemde artikel nauwkeurig te herlezen, omdat de gebruikte termen niet weer opnieuw zullen worden omschreven.*
Verder worden drie correcties aangebracht.

1 *De ideale strategie werd aangegeven als een goed verdelen van de aandacht. Dit wordt nu: een goed wisselen van de aandacht.*
2 *Er werd gesuggereerd, dat er veel strategieën zouden bestaan, die geleidelijk zouden kunnen ontwikkelen tot het ideale eindstation van die ideale strategie. Dit wordt nu: Men kan volstaan met die ideale strategie en die is onmiddellijk aan te kweken. Hoe dat gaat wordt in dit artikel beschreven.*
3 *Aan het slot van het artikel staat de aanbeveling met strategieën te wachten tot de 15-jarige leeftijd. Dit wordt nu: Men beginne met het aankweken van de ideale strategie zo gauw men met vraagstukken van een straks aan te geven type begint.*

Deze wijzigingen zijn een gevolg van de praktijk. Door het kritisch volgen van het leerproces bleken de wijzigingen mogelijk en noodzakelijk.

Een handig model om te illustreren hoe een probleem wordt opgelost is het zoeken van een weg door een stad of het reizen per trein. Van één van deze twee modellen zal in het vervolg een uitgesponnen gebruik gemaakt worden. We gaan er nu van uit, dat de begrippen goed zijn begrepen en geoefend, dat de regels hetzelfde hebben ondergaan, en dat de principes ook inzichtelijk geïncorporeerd zijn. De leerprocessen hiervoor zijn fase na fase degelijk doorgewerkt en geoefend met passende vraagstukken. Zo lang dit niet is gebeurd heeft het geen zin te beginnen met vraagstukken die een strategie vereisen. Een aantal tests is zeker nodig. Onvoldoenden zouden daarbij vrijwel niet voor mogen komen.
Van nu af aan zijn dus fouten alleen maar strategie-fouten. En strategie-fouten ontstaan door een gebrek aan denkdiscipline. Denkdiscipline is een zeer nuttige aangelegenheid ook voor het gewone dagelijkse leven. Gebrek eraan bemoeilijkt bijna elk gesprek. En daar de wiskunde een prachtige gelegenheid geeft het te oefenen, omdat wiskunde zo simpel is, is dat al een voldoende reden de wiskunde als schoolvak te handhaven.
De kern van de zaak is, dat de strategie berust op twee strijdige tendensen: centratie en diffusie. Bij centratie is de aandacht gericht op een zeer klein gebiedje. Alles in dat gebiedje is helder en duidelijk, alles daarbuiten is volkomen donker, moet dat persé ook zijn. Een fout ontstaat als dat niet gebeurt, want dat leidt de aandacht van het kleine gebiedje af, en er sluipen allerlei ongewenste elementen naar binnen. Deze fout heb ik *slordigheid* genoemd.
Bij diffusie is de aandacht vaag verdeeld over een groot gebied. Op allerlei plaatsen

lichten er wel kleine vlekjes op, maar de aandacht blijft niet aan die flitsjes plakken, mag dat ook persé niet. Een fout ontstaat, als dat juist wel gebeurt, want dan wordt de aandacht afgehouden van het opmerken van al die andere flitsjes, en die moeten ook opgemerkt worden. Deze fout heb ik *verkijken* genoemd.

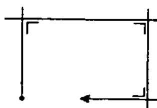
Veronderstel nu, dat ik iemand wil gaan bezoeken in een voor mij vreemde stad. Ik ga er heen per trein en kom dus aan op het station. Daar sta ik dan op het stationsplein, ik haal mijn agenda uit de zak en lees het adres van de kennis. Ik heb geen haast en het is mooi weer, dus ik besluit te lopen. Aan een politie-agent vraag ik de weg. Hij verschaft me twee soorten van informatie: 1e een vage plaatsaanduiding met de losse hand uitgevoerd; in die hoek zit het ongeveer.

2e een uitvoerig programma in termen van: dan gaat U eerst zus, tot U bij een zo komt, daar gaat U links, vier zijstraten voorbij en dan rechts, dan ziet U zo'n grote rode zus, daar loopt U links omheen, dan volgt U een eindje de trambaan tot een hele hoge zo, en dan . . . . .

Beide informaties probeer ik zo goed mogelijk in het geheugen op te bergen; was het maar fotografisch.

Vol goede moed ga ik op pad. Wat kan er fout gaan. Allerlei natuurlijk en het gebeurt ook. De grote rode zus wordt uitstekend linksomheen genomen, maar de hele hoge zo komt maar niet opdagen. Ik zit kennelijk mis. Omdat ik alleen maar strategiefouten zou maken, kan het niet zijn, dat ik i.p.v. trambaan renbaan heb genomen (begripsfout), dat ik i.p.v. linksomheen rechtsomheen ben gegaan (regelfout), dat ik i.p.v. vier zijstraten voorbij vier zijstraten ben ingegaan (principefout). Strategiefouten dus. Toegegeven, ik heb niet alleen maar op de weg gelet, ik heb winkels gekeken, een kopje koffie gedronken, een voorbijganger een vuurtje verschaft. Aha, dat is het, waar is de trambaan. Ik ben de trambaan kwijt geraakt. Waarschijnlijk ging de tram ergens de hoek om, en ik ben in mijn vaag gestructureerde veld met de vage notie: in die richting moet het ergens zijn, rechtdoor gelopen. *Slordigheid.*

Deze storie is een verzinsel, dus ik kan net zo goed weer naar het station terug gaan en het opnieuw proberen. Het gaat weer fout, allicht. Want ik besluit me heel precies aan het programma te houden, me niet door wat dan ook te laten afleiden. Helaas, deze keer komt zelfs de grote rode zus niet in 't vizier. Hoe is dat nu weer mogelijk. In straten zitten vaak bochten, dat valt de meeste mensen niet eens op, in gedachten trekken ze kromme straten allemaal recht. Men verwacht na drie keer rechts afslaan weer op het uitgangspunt terug te zijn, volgens eigenschappen van een rechthoek, maar het kan ook rechtdoor betekenen:





Welke fout heb ik nu gemaakt. Heel simpel: in die straat met die vier zijstraten zaten nogal wat bochten. Er zat juist een zeer scherpe bocht na de vierde zijstraat. Doordat ik een nogal riante inrit voor een zijstraat had aangezien, ging ik voor de bocht rechtsaf. Het had na de bocht moeten zijn. Dat scheelde een kwartslag in de richting. Als ik nu maar rekening had gehouden met mijn vage richtingsgevoel, dan had ik deze fout niet gemaakt. *Verkijken.*

Waar het op aankomt is goed te leren onderscheiden wanneer gecentreerd en

wanneer gediffuseerd moet worden. Dat is de techniek van het aankweken van denkdiscipline. Deze techniek zal nu in het kort worden aangegeven (een volledig beschrijven zou een heel boek vullen), waarna dit wordt geïllustreerd met een praktijkvoorbeeld uit de wiskundeles.
Didactiek is de vertaling in psychologische termen van de wisselwerking tussen leerstof en werkvorm. Een didactische beschouwing resulteert uiteindelijk in een methode. Een goede methode voor het aanleren van begrippen is de geprogrammeerde instructie (lineair programma). Om dit aan te tonen moeten uit de leerstof de begrippen geïsoleerd worden, en uit de werkvormen deze speciale vorm van zelfwerkzaamheid. Vertaling van de elementen uit deze twee gebieden in psychologische termen levert de mogelijkheid tot een didactisch betoog, waaruit de waarde van genoemde combinatie zal blijken. Op analoge manier kan worden aangetoond, dat die zelfde geprogrammeerde instructie zeer slecht is voor het aankweken van principes en strategieën, zodat het consequent toepassen van G.I. leidt tot niveaulaaghoudingsdwang voor de leerlingen. De nare gevolgen van G.I. als alleenzaligmakende werkvorm heb ik vele malen van zeer nabij meegemaakt.
Nu dus de methode van de strategieën-kweek. De leerstof is dus duidelijk: het leren oplossen van vraagstukken waarbij strategie nodig is. Dan de werkvorm. Hiervoor kies ik de volgende. Ik roep één leerling voor het bord. Het gesprek gaat met hem (haar) alleen. De andere leerlingen luisteren en kijken actief. Er wordt namelijk een boeiende voorstelling gegeven. Er wordt zeer veel gelachen. Ze mogen wel interrumperen, maar niet straffeloos. Het risico van een sneer moeten ze lopen, maar dat risico nemen ze dan ook, en dan is de interruptie ook waardevol. De leerling voor het bord ondergaat een strenge zuiveringskuur. Spijkerhard en emotioneel zeer geladen. Ik noem het intensieve hersenspoeling zonder de nare bijsmaak van het woord, want deze keer is het doel eens zeer heilig. Een vraagstuk wordt bij de kop genomen, en elke zonde tegen adequate centratie of diffusie wordt onmiddellijk pijnlijk afgestraft, en met goede voorbeelden uit het dagelijkse leven duidelijk gemaakt. Als de beurt voorbij is gaat de leerling weer zitten en voelt zich als na een saunabad van over de 100° C. Hij zou nu bergen kunnen verzetten. Volgende patiënt.
Nu het praktijkvoorbeeld. In de vorm van een dialoog. Een uit het geheugen genoteerd bijna verbatim verhaal.
Een simpel vraagstuk uit de tweede klas. De opgave: Teken de verzameling die voldoet aan het kenmerk: Bij gegeven lijnstukken a en b en gegeven punten P en Q de punten te tekenen, die tot P de afstand a en tot Q de afstand b hebben. Of in symbolische notatie:

$$\{\mathscr{X} \mid d(X, P) = a \wedge d(X, Q) = b\}$$

$\mathscr{X}$ duidt de verzameling van alle punten van het vlak aan, X is een willekeurig element uit die verzameling: $X \in \mathscr{X}$.
Het vraagstuk wordt vlot opgelost, tot zover geen problemen. Maar dan vervolgt het boek met: Hoe moeten de gegevens gekozen worden opdat de verzameling uit precies één punt bestaat.

Dan ontspint zich de volgende dialoog: (D = docent, L = leerling)
D Zeg er eens wat van.
L . . . . die ene straal wat korter nemen.

D Fout. We hebben het over de gegevens en daar zie ik geen stralen, alleen twee punten en twee lijnstukken. (Slordigheid.)
L Het ene lijnstuk wat korter nemen.
D Precieser.
L ?
D Goed. Laten we ergens anders starten. Je hebt daarnet het kenmerk goed gesplitst van twee kenmerken met een $\wedge$ ertussen tot twee verzamelingen met een $\cap$ ertussen. Hoe zagen die verzamelingen eruit?
L Cirkels.
D Goed. Uit hoeveel punten bestond de doorsnede?
L Twee.
D Mooi. Hoe moeten die cirkels liggen zodat die doorsnede juist één punt is?
L Elkaar raken. (Hier heb ik het protocol vervalst, in werkelijkheid kwam dit antwoord niet direct, er werd een begripsfout gemaakt, maar die zou ik overslaan, vandaar.)
D Wat is de voorwaarde voor raken?
L De som van de stralen gelijk aan de afstand van de middelpunten. (Weer een vervalsing, er moest een beetje geholpen worden. Regelfout.)
D Houd dit vast. (Aanwijzing voor een juiste diffusie verderop.)
L (Zacht voor zich heen) De som van de stralen gelijk . . . . .
D Waar denk je aan bij het vaststellen van een cirkel?
L Aan het middelpunt en de straal. (Vervalsing, hij weet het niet, ik moet hem helpen met het voorbeeld van een geit, dat met touw en pin op een weitje moet worden vastgezet. Hoeveel gras eet die geit? Maar een smal strookje want hij wil alsmaar weglopen. Gelach. Principefout.)
D Uitstekend. (Wijst op het bord) Deze cirkels hebben twee snijpunten. Hoe kun je ervoor zorgen dat er cirkels komen die elkaar raken?
L Een straal korter nemen. (Denkt weer aan zijn eerste opmerking, centreert niet goed. Slordigheid.)
D Precieser.
L (Wijst er één aan) Deze.
D Is dat alles wat je weet? Ik voel me tekort gedaan, vanmorgen gaf de sigarenman me al geld te weinig terug, en nu jij weer. (Gelach.)
L (Kijkt beteuterd) Nou ja, die andere straal kan ook korter.
D Heb je nu alles?
L Ik dacht . . .
D Denken is niet altijd het beste. Herinneren mag ook wel eens. Om een cirkel vast te stellen . . . een geit een cirkeltje te laten vreten . . .
L O, ja, de middelpunten.
D Wat is daarmee?
L Die kunnen ook verder uit elkaar. (Aha - erlebnis, het straalt uit de ogen.)
D Zeg dat eens netjes.
L De afstand van de middelpunten kan groter zijn.
D Zeer bijzonder geformuleerd. Hoe zit dat nu met die gegevens?
L De som van de stralen . . . (Ik onderbreek met een kwasie-krachtterm.)
D Daar ga je weer. Waar hebben we het over? (Slordigheid.)
L O, ja. (Formuleert het nu goed) De som van de lijnstukken moet gelijk zijn aan afstand van de twee punten. (Zucht.)
D Ga maar zitten.

In dit voorbeeld kwamen maar een paar simpele gevallen van slordigheid voor en helemaal geen verkijken. Niettemin valt er wel wat uit op te maken. Iedereen kan voor zichzelf protocollen maken (bandrecorder) en deze met behulp van de foutentypen analyseren. Een geneesmiddel is nog niet direct zo erg belangrijk. De fouten signaleren is om te beginnen al mooi. Voor de studerenden aan leraarsopleidingen is een training in werkvormen een categorische imperatief.

Mathematisch Centrum

Oriënterend Colloquim voor Leraren

Gedurende het cursusjaar 1973–1974 zal door het Mathematisch Centrum een cursus

Lineaire Algebra en Meetkunde

worden gegeven voor leraren VWO en HAVO en andere belangstellenden.
Deze cursus is vrij toegankelijk. De te behandelen stof zal in een syllabus worden opgenomen.
De leiding is in handen van mevr. drs. J. M. Geijsel.
Bij deze cursus zal aandacht worden besteed aan de aspecten van de lineaire algebra, die voor het VWO-onderwijs van belang zijn.
Op verzoek van deelnemers aan de vorige cursus zal een deel van de cursus lineaire algebra de vorm krijgen van een werkcollege.
Evenals vorig cursusjaar zal de cursus plaatsvinden *wekelijks* op de woensdagavonden in de periodes september t/m half november 1973 en half januari t/m half maart 1974.
Aanvangsdatum: 5 september 1973
Tijd : 19.45 (precies) tot 21.30 uur
Plaats : Mathematisch Centrum, grote collegezaal.
2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam (O).
Leraren, verbonden aan door het Ministerie van Onderwijs gesubsidieerde onderwijsinstellingen kunnen voor een eventuele tegemoetkoming in de reiskosten in aanmerking komen.
Deelnemers aan de cursus gelieven zich op te geven bij de administratie van het Mathematisch Centrum vóór 1 augustus 1973 (toestel 64).

Administratie Mathematisch Centrum.

Dubbele produkten insplitsen

LOURENS VAN DEN BROM
Krommenie

1 In een syllabus voor het vak Analyse, welke aan één der nederlandse universiteiten in gebruik is - ten behoeve van eerste-jaars-studenten, die als één der hoofdvakken de wiskunde gekozen hebben - wordt aan de reële ontbinding van de reële veelterm $3x^4 - 2x^2 + 3$ ongeveer één bladzijde (formaat A4) besteed. In de tekst is daarbij dan nog een figuur opgenomen, die ertoe moet dienen de berekening, die via de complexe nulpunten van die veelterm verloopt, te illustreren en te bekorten. Bij dat voorbeeld, bedoeld als toelichting van de theorie der complexe getallen, wordt niet vermeld dat de ontbinding ook zuiver reëel hoogst triviaal kan verlopen, en wel als volgt:

$$3x^4 - 2x^2 + 3 = \tfrac{1}{3}(9x^4 + 18x^2 + 9 - 24x^2) =$$

$$\tfrac{1}{3}[\{3(x^2 + 1)\}^2 - (2\sqrt{6}x)^2] = \tfrac{1}{3}\{3(x^2 + 1) + 2\sqrt{6}x\}\{3(x^2 + 1) - 2\sqrt{6}x\} =$$

$$3(x^2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{6}x + 1)(x^2 - \tfrac{2}{3}\sqrt{6}x + 1)$$

Dat men ter illustratie van een bepaalde wiskundige theorie zijn toevlucht moet nemen tot een voorbeeld dat langs andere weg, zonder gebruikmaking van de betreffende theorie, eenvoudiger en directer kan worden opgelost, is een vaker voorkomende situatie in het wiskundeonderwijs. Maar laat men dan toch als-je-blieft ook die eenvoudige oplossing de leerlingen geven, ondanks het risico, dat de leerlingen de ingewikkelde oplossing, bedoeld als toelichting van de aan de orde zijnde theorie, niet meer zullen aankijken.

In de syllabus, waaruit het aangehaalde voorbeeld afkomstig is, wordt later ook de primitieve functie van $\dfrac{1}{x^4 + 1}$ besproken. Ook in dat voorbeeld wordt de ontbinding van $x^4 + 1$ via de complexe nulpunten uitgevoerd. De auteur had daarbij, alleen al door het verkregen resultaat $(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$, tot het inzicht kunnen komen dat de ontbinding van $x^4 + 1$ eenvoudig verloopt via $x^4 + 2x^2 + 1 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$.

2 Het zal mij niet verbazen te vernemen dat de ontbinding van $Ax^4 + 2Bx^2 + C$, ook in het geval $B^2 - AC < 0$, vijf-en-twintig jaar geleden gemeengoed was in de Mulo-B-opleiding. De Mulo was destijds toch immers het schooltype waar het aanleren van allerlei technische en praktische vaardigheden bij het wiskunde- en taalonderwijs op de voorgrond stond.
De Mulo beantwoordde de vraag: 'Hoe?', terwijl het Gymnasium, met meer of minder succes, de leerlingen liet vragen: 'Waarom?'

De redactie-secretaris, A. M. Koldijk, maakte mij in dit verband erop attent dat

voor 1958 in de 1e klasse van het v.h.m.o. ontbindingen van het genoemde type aan de orde kwamen. Door middel van voorbeelden, zoals $a^4 + 4$ en $x^4 - 4x^2 + 36$, waarin weliswaar de coëfficiënten van de ontbonden vorm geheel zijn, werd dit onderwerp behandeld.

3 Laten we nog ingaan op de ontbinding van $Ax^4 + 2Bx^2 + C$, opgevat als reëele veelterm met reëele coëfficiënten.
We onderscheiden de drie gevallen: $A = 0, A < 0$ en $A > 0$.

$A = 0$: Indien $BC < 0$, dan een reëele ontbinding als verschil van twee kwadraten. Indien $BC > 0$, dan geen reëele ontbinding. Indien $BC = 0$, dan is er reeds ontbonden in factoren, zo er nog iets in factoren te ontbinden valt.

$A < 0$: Door de factor -1 buiten de haakjes te halen kunnen we dit geval onderbrengen bij het volgende.

$A > 0$: We proberen eerst een kwadraat af te splitsen:

$Ax^4 + 2Bx^2 + C = \frac{1}{A}(A^2x^4 + 2ABx^2 + AC) =$

$\frac{1}{A}\{A^2x^4 + 2ABx^2 + B^2 - (B^2 - AC)\}$; is nu $B^2 - AC \geqq 0$, dan kunnen we reëel verder gaan met een verschil van twee kwadraten:

$\frac{1}{A}\{(Ax^2 + B)^2 - (\sqrt{B^2 - AC})^2\}$, etc.

Blijkt echter $B^2 - AC < 0$, dan gaan we opnieuw beginnen, waarbij we opmerken dat vanwege $0 \leqq B^2 < AC$ en $A > 0$, ook $C > 0$ is:
$Ax^4 + 2Bx^2 + C = (\sqrt{A}x^2)^2 + 2\sqrt{AC}x^2 + (\sqrt{C})^2 - 2(\sqrt{AC} - B)x^2$, vanwege de gemaakte veronderstellingen is $\sqrt{AC} - B > 0$ en kunnen we reëel overgaan op:
$(\sqrt{A}x^2 + \sqrt{C})^2 - (\sqrt{2(\sqrt{AC} - B)}x)^2$, hetgeen als verschil van twee kwadraten reëel te ontbinden is.

Conclusie: $Ax^4 + 2Bx^2 + C$ is voor ieder reëel drietal A, B, C, (waarbij $A \neq 0$) reëel te ontbinden middels een reëele procedure.

Terzijde: Indien $A > 0$, $C > 0$ en $B < 0$, dan kan men de truc altijd volgen, ongeacht de waarde van de discriminant $B^2 - AC$, immers dan is $\sqrt{AC} - B$ ongetwijfeld positief. Is in zo'n geval $B^2 - AC > 0$, dan heeft men nog de mogelijkheid, om naar believen een + of een − teken bij het in te splitsen dubbele produkt te kiezen, immers dan zijn zowel $+\sqrt{AC} - B$ als $-\sqrt{AC} - B$ positief.

Opmerking: Iedere veelterm, met reëele coëfficiënten, is in principe te ontbinden tot een produkt van lineaire en kwadratische factoren, die eveneens reëele coëfficiënten bezitten. Wordt men in de praktijk voor de noodzaak gesteld een veelterm te ontbinden, dan zal men in het algemeen genoegen moeten nemen met benaderingen der coëfficiënten. Toch immers zijn vergelijkingen van de 5e graad, en hoger, langs zuiver algebraïsche weg in het algemeen niet oplosbaar; en ook reeds bij de vergelijking van de 3e graad moet men in die z.g. casus irreducibilis - het geval der drie reëele wortels - zijn toevlucht nemen tot goniometrische functies.

4 Bij $Ax^2 + 2Bx + C$ heeft de aanpassing van de middelste term, ter verkrijging van het volledige kwadraat, geen zin. In de eerste plaats dient men al een geval onder handen te hebben waarbij A en C hetzelfde teken bezitten en in de tweede plaats wordt men dan bij het opstellen van het verschil der kwadraten geconfronteerd met $\sqrt{x}$ en men is verder van huis dan ooit.
Terzijde zij opgemerkt dat het wel zinvol is de leerlingen te attenderen op de mogelijkheid om de kwadratische term aan te passen, vooral praktisch indien C een perfect kwadraat is.

Welke didactische consequenties kan men dan wel ontlenen aan de truc (besproken onder punt 3) voor het huidige secundaire onderwijs.
Wel, bij de reële ontbinding van bijvoorbeeld $a^8 - b^8$ moet men niet stoppen bij $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$, maar moet men de factor $a^4 + b^4$ nog verder afbreken tot $(a^2+\sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$. En verder, zo men bij Wiskunde II, voor v.w.o., de complexe getallen als keuze-onderwerp genomen heeft, dan is men door het bovenstaande er wel voor gewaarschuwd niet te voorbarig een reële opgave met een reëel antwoord via de complexe getallen aan te vatten.

5 Na zo'n verhaal over ontbinding in factoren opgeschreven te hebben gaat men ook eens kijken hoe Wijdenes in 'Lagere Algebra' dit onderwerp behandelde. In § 29 van deel I (8e druk) komt de ontbinding in factoren aan de orde.
De door mij aangehaalde truc wordt in 'Lagere Algebra' als verbinding der typen $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ en $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ genoemd, met als voorbeelden $x^4 - 4x^2y^2 + 36y^4$ en $a^4 + 4b^4$.
Bij de opsomming der verschillende typen geeft Wijdenes o.a.:
a) $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + B^{n-1})$,
b) $A^{2n} - B^{2n} = (A + B)(A^{2n-1} - A^{2n-2}B + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad - B^{2n-1})$,
(Met de vermelding dat $(A^n + B^n)(A^n - B^n)$ de voorkeur verdient.)
c) $A^{2n+1} + B^{2n+1} = (A + B)(A^{2n} - A^{2n-1}B + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + B^{2n})$.
In deze opsomming ontbreken:
d) $A^{4n} + B^{4n} = (A^{2n} +\sqrt{2}A^nB^n + B^{2n})(A^{2n} - \sqrt{2}A^nB^n + B^{2n})$ en
e) $A^{4n+2} + B^{4n+2} = (A^2 + B^2)(A^{4n} - A^{4n-2}B^2 + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + B^{4n})$.
Nu kan men opmerken dat *e)* toch eigenlijk niet vermeld hoeft te worden, omdat *e)* direct uit *c)* volgt door A en B respectievelijk door A^2 en B^2 te vervangen. Maar een soortgelijke opmerking kan men ook maken omtrent de wel vermelde typen. Bijvoorbeeld dat *a)* het directe gevolg is van de distributieve wet, waarop het buiten haakjes halen berust, n.l.:

$$A^n - B^n = A^n - A^{n-1}B + A^{n-1}B - A^{n-2}B^2 + A^{n-2}B^2 - \quad . \; . \; . \; . \quad etc. \; . \; .$$
$$. \; . \; . \; - AB^{n-1} + AB^{n-1} - B^n =$$
$$= A^{n-1}(A - B) + A^{n-2}B(A - B) + \quad . \; . \; . \; . \quad + B^{n-1}(A - B) =$$
$$= (A^{n-1} + A^{n-2}B + \quad . \; . \; . \quad + B^{n-1})(A - B)$$

6 Ik kan mij niet aan de indruk onttrekken, o.a. door de kwestie die aan het begin van dit stuk werd aangehaald, dat de modernisering van het wiskundeonderwijs allerlei rekentrucjes en techniekjes terugdringt en doet vergeten. Die trucjes en techniekjes maken het leven van de wiskundeleraar voor de klas wat aangenamer, omdat zij hem behoeden voor te lange berekeningen en omslachtige redeneringen. De modernisering van het wiskundeonderwijs streeft naar inzicht in structuren en

wil de wiskunde als een samenhangend geheel tot leven brengen. Ik ben van mening dat een inzicht in de samenhang niet verkregen kan worden zonder ook de details, de trucjes en de techniekjes, te behandelen. Maar omgekeerd kunnen die trucjes en techniekjes niet tot leven komen zonder deze te plaatsen in een samenhangend kader.
Zag men vroeger door de bomen het bos niet, thans lijkt men weleens te vergeten dat een bos een verzameling bomen is.

Eindexamens - 1973

Plaatsten we vorig jaar de mavo-opgaven niet meer, thans ontbreken ook die voor het havo. Aan alle havo-scholen werd immers reeds het nieuwe programma geëxamineerd. Wel zullen we weer de opgaven van de herexamens (examens tweede zitting) afdrukken zodra ze beschikbaar zijn.

WISKUNDE I – VWO (3 uur)

1 De functie f is voor $0 < x < \pi$ gedefinieerd door $f(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$.
a Voor welke x geldt: $f(x) > 0$?
b Welke waarden kan $f(x)$ aannemen?
c Bewijs dat de grafiek van f twee buigpunten heeft en bereken de coördinaten van deze buigpunten.

2 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sqrt{(x^2 - x)}$.
a Voor welke x geldt: $f(x) \geqq x\sqrt{x}$?
b De X-as, de beide delen van de grafiek van f en de lijn $y = 2\sqrt{2}$ begrenzen een gesloten vlakdeel. Bereken de inhoud van het lichaam dat ontstaat bij wenteling van dit vlakdeel om de X-as.

3 De functies f_p zijn voor niet-negatieve x gegeven door

$f_p(x) = x^p \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ waarbij p een positieve constante is.

a Teken de grafiek van f_1.
b De X-as, de grafiek van f_1 en de lijn $x = k$ begrenzen een gesloten vlakdeel met oppervlakte $O(k)$. Bereken $\lim_{k \to \infty} O(k)$.
c Voor welke p raakt de grafiek van f_p de lijn $y = 1$?

4T* De functie f is gedefinieerd door $f(x) = -1 + e^{x^2 + x}$ voor $x \leqq 0$
$f(x) = -\ln(x + 1)$ voor $x > 0$.
a Bereken de extreme waarden van $f(x)$ en onderzoek de aard van deze extrema.
b Bereken het grootste getal p met de eigenschap dat elke x waarvoor geldt $|x| \leqq p$, voldoet aan $|f(x)| \leqq e^2 - 1$.

4D* Gegeven is de differentiaalvergelijking $x\,dy - y\,dx = 2x^2(x - 3)\,dx$.
a Voor welke derdegraadsfuncties f geldt dat $y = f(x)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking?
b Wat is de verzameling van de punten waarin deze differentiaalvergelijking een lijnelement met niet-negatieve richtingscoëfficiënt definieert?
Geef deze verzameling aan ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel.

WISKUNDE II – VWO (3 uur)

1 Van een kubus $ABCD.EFGH$ heeft de ribbe de lengte $3a$.
Op het verlengde van de ribbe DC ligt een punt P zo dat $CP = a$.
a Bewijs dat de hoek van de lijn EP en het vlak $BCGF$ kleiner dan 45° is.
Een kegel heeft het snijpunt T van de lijnen EG en FH als top.

* De opgave 4T is bedoeld voor de kandidaten opgeleid volgens het tussenprogramma, 4D voor die welke het definitieve programma volgden.

De grondcirkel van de kegel ligt in het vlak $ABCD$ en de as van de kegel is evenwijdig aan de lijn AE. De lijn EP raakt de kegel.

b Construeer in een projectiefiguur van de kubus het raakpunt Q van de lijn EP en de kegel.

c Druk de lengte van het lijnstuk PQ uit in a.

2 Tén opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven een punt P $(a, 2b)$ waarbij $a \neq 0$ en $b \neq 0$, een cirkel met middelpunt $(0, b)$ en een parabool met punt O als top en de X-as als symmetrie-as.

De cirkel en de parabool snijden elkaar in het punt P.

a Bewijs dat de cirkel en de parabool elkaar in P loodrecht snijden.

b Wat is de verzameling van de punten die ten opzichte van de cirkel en ten opzichte van de parabool poollijnen hebben die loodrecht op elkaar staan?

3 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven een stelsel krommen met vergelijking $(a-1)(x-1)^2 + (y+a)^2 = a(a-1)$ waarbij $a \neq 0$ en $a \neq 1$.

a Voor welke a is dit de vergelijking van een cirkel, van een ellips, van een hyperbool?

b Bewijs dat alle krommen van het stelsel door twee vaste punten gaan.
Welke punten zijn dat?

c Wat is de verzameling van de punten waardoor een hyperbool van het stelsel gaat?
Geef deze verzameling in een tekening aan.

4 In een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is punt S het snijpunt van de lijnen AC en BD. Bovendien is gegeven dat $AB = ST = 6$.

Een bol met middelpunt M gaat door de punten C, S en T en raakt de lijn BD.

Deze bol snijdt de ribben AT, BT en DT bovendien respectievelijk in de punten P, Q en R.

a Bereken de inhoud van het lichaam $MPQRT$.

b Een tweede bol gaat door de middens van de lijnstukken AP, AQ, AR en AS.
Bereken de straal van de snijcirkel van de tweede bol met het vlak $ABCD$.

ALGEBRA – VWO (experiment) (2,5 uur)

1 De functie f is voor elke reële x gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

a Bewijs dat de lijn met vergelijking $y = 4x$ de grafiek van f raakt.

b Bereken de extreme waarden van $f(x)$ en teken de grafiek van f.

c Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as, de grafiek van f en de lijn $x + 3 = 0$.

2 Gegeven is de differentiaalvergelijking $dx + dy = (x+y)^2\, dx$.

V_k is de verzameling van de punten waarin het lijnelement met richtingscoëfficiënt k aan deze differentiaalvergelijking voldoet.

a Teken V_0.

b Als aan de differentiaalvergelijking een functie voldoet waarvan een maximum gelijk is aan 3, voor welke x wordt dit maximum dan aangenomen?

c De kromme met parametervoorstelling $x = f(t)$
$$y = t - f(t)$$
is een integraalkromme van de differentiaalvergelijking die door het punt $(1, 0)$ gaat.
Welke functie is f?

3 Beschouw de verzameling van de functies $f_k : x \to e\, x \ln^k x$ voor elke positieve reële x en voor elke positieve gehele waarde van k.

a Teken de grafiek van f_2.

b Voor welke k heeft de functie f_k twee extreme waarden?

4 De functie f is voor elke positieve reële x differentieerbaar.

Voor elke positieve reële x geldt: $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.

a Bewijs dat $f'(1) = 0$.

b Als $f'(x) < 0$ voor elke x tussen 0 en 1, dan heeft de functie voor $x = 1$ een minimum.
Bewijs dit.

GONIOMETRIE EN ANALYTISCHE MEETKUNDE – VWO (experiment) (2,5 uur)

1 De functie f is voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + \sqrt{2}}$.
a Los op: $f(x) = 1$.
b Bereken de extreme waarden van $f(x)$.
c Teken de grafiek van f.

2 Op een orthonormale basis zijn gegeven de punten $O = (0, 0)$; $A = (2, -1)$ en $B = (-2, 11)$.
V is het stelsel lijnen met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
a Bewijs dat de bissectrice van hoek AOB loodrecht staat op elke lijn van V.
b Stel vergelijkingen op van de cirkels die de lijn door O en A raken in A en die tevens de lijn door O en B raken.
c Op een lijn van V liggen de punten C en D zo dat $d(C; D) = 4$ en de hoeken ACB en ADB recht zijn.
Bereken p.

3 Gegeven is het onafhankelijke stelsel vectoren $\{\bar{a}, \bar{b}\}$.
De vectoren $\bar{p}$ en $\bar{q}$ zijn gegeven door $\bar{p} = 2\bar{a}$ en $\bar{q} = \alpha\,\bar{a} + \beta(\bar{a} - \bar{b})$.
De vectoren b, p en q zijn de plaatsvectoren van opvolgend de punten B, P en Q.
a Bereken α en β voor het geval dat zowel het stelsel $\{\bar{b}, \bar{q}\}$ als het stelsel $\{2\bar{b} + \bar{q}, \bar{a} - \bar{b}\}$ afhankelijk zijn.
b Stel een betrekking op tussen α en β voor het geval dat punt B op de lijn door P en Q ligt.
c Verder is gegeven dat $\|\bar{b}\| = 2\|\bar{a}\|$ en $\varphi(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{2}{3}\pi$.
De lijn door P en Q staat loodrecht op de lijn door B en P.
Stel een betrekking op tussen α en β.

STEREOMETRIE – VWO (experiment) (2,5 uur)

In de vraagstukken 1, 2 en 3 hebben de gegevens betrekking op een positief georiënteerde en orthonormale basis $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ van de ruimte.

1 Gegeven zijn het vlak V met vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ en de lijn l met vectorvoorstelling
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
a Stel een vergelijking op van de bol die l in het punt $(0, 1, 2)$ raakt en waarvan het middelpunt op de drager van $\bar{e}_1$ ligt.
b Er zijn twee bollen die in het punt $O = (0, 0, 0)$ het vlak door de dragers van $\bar{e}_2$ en $\bar{e}_3$ raken en die tevens V snijden volgens een cirkel met straal 2.
Stel van elk van deze bollen een vergelijking op.

2 Gegeven is het stelsel vergelijkingen:
$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ (p + 3)x_1 + (3p - 4)x_2 - 13x_3 = 1 - 4p. \end{cases}$$
a Bereken p als het stelsel geen oplossingen heeft.
Bereken p als het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.
b Stelt de derde vergelijking voor elke reële p een vlak voor?
Bewijs dat de door de derde vergelijking voorgestelde vlakken één gemeenschappelijke snijlijn hebben.
Stel een vectorvoorstelling op van deze snijlijn.

3 Gegeven zijn het punt $P = (-2, 5, 1)$, het vlak V met vergelijking $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$ en de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a Q is een punt van l.
Bereken de coördinaten van Q als het midden van het lijnstuk PQ in vlak V ligt.

b R is een punt van l.
Het snijpunt van de lijn door P en R en het vlak V is punt S.
Bereken de coördinaten van S als $d(R; S) = 3\, d(S; P)$.

4 Gegeven is het onafhankelijke stelsel vectoren $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ waarvoor geldt:

$\| \bar{a} \| = \| \bar{b} \| = \| \bar{c} \|$ en $\varphi(\bar{a}; \bar{b}) = \varphi(\bar{b}; \bar{c}) = \varphi(\bar{c}; \bar{a}) = \frac{1}{3}\pi$.

Verder is gegeven dat $\bar{p} = \bar{a} + \lambda \bar{b}$, $q = \bar{b} + \lambda \bar{c}$ en $\bar{r} = \bar{c} + \lambda \bar{a}$.

a Bereken λ als het stelsel $\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$ orthogonaal is.

b Als het stelsel $\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$ afhankelijk is, dan is $\varphi(\bar{p}; \bar{q}) = \frac{2}{3}\pi$.
Bewijs dit.

Vragen en reacties van lezers

Mijnheer van Dalen-III
(Zie Euclides, maart 1973, p. 274-275)

Dat de nummering van de kwadranten, zoals de heer van Eek stelt, slechts een afspraak is, is juist. Men zou de aangebrachte ordening dus 'toevallig' kunnen noemen. Dat echter aan deze afspraak in een examen niet geappelleerd mag worden, verbaast me. De wiskunde wemelt immers van dergelijke afspraken. Enkele wil ik noemen:
Aftrekken van positieve getallen is op de getallenlijn naar links gaan (o.a. van Hiele in Van A tot Z). Afgezien nog van het feit, dat 'naar links gaan' wiskundig weinig betekenis heeft, is de gebruikte ordening op de getallenlijn een afspraak.
Zo ook: de verticale (?) as is de y-as.
Bij -de rechthoek *ABCD*- verwachten we, dat *AC* een diagonaal is en niet *AB*.
En wat te zeggen van: in een rechthoekig assenstelsel *XOY* is gegeven $A(4, 3)$. Hier wordt verondersteld, dat de leerling de ordening (x, y) gebruikt. Kan een leerling hier niet in twijfel zijn? Moeten we steeds een formulering zoeken, die twijfel uitsluit, zoals $A(x, y) = (4, 3)$? Natuurlijk niet. Dergelijke afspraken dienen een vlotte communicatie. Zodra een afspraak een algemeen karakter heeft, mag deze m.i. gehanteerd worden.
In dit verband toch ook Mijnheer Van Dalen. Het werken met teveel haakjes bevordert de duidelijkheid niet. Bovendien moeten we dan ook weer de (toevallige) afspraak maken, dat, wat tussen haakjes staat, voor gaat.
De opgave $25 : (5 \cdot 2) : 3 = 25 : 10 : 3$ kan ik niet oplossen, of iemand moet mij vertellen (volgens afspraak) waar ik moet beginnen.
De wortelnotatie is inderdaad niet fraai.

namens de wiskunde-schrijfgroep C.I.T.O.
april 1973 P. Th. Sanders

Niemand zal betwisten, dat er overal afspraken gemaakt moeten worden en dat het dan de bedoeling is, dat men zich aan deze afspraken houdt. Het is echter bekend, dat men door te veel afspraken te maken de communicatie belemmert.
Het is daarom zaak:

1 het aantal afspraken tot een redelijk aantal te beperken,
2 de duur van de afspraken niet langer te doen zijn dan noodzakelijk is,
3 de groep van personen die bij de afspraak betrokken is te beperken tot diegenen voor wie de afspraak zinvol is.

Het 'naar links gaan' op de getallenrechte en het verticaal zijn van de Y-as zijn geen afspraken, want men is vrij daarvan af te wijken. Als er ooit een afspraak is, dan is die van zeer beperkte tijdsduur.
Het schrijven van vectoren in de vorm $[a, b]$ is alleen af te spreken binnen een beperkte groep van personen (bijvoorbeeld werkende met een bepaald leerboek) die aan die schrijfwijze behoefte hebben.
Voor de betekenis van $25 : 10 : 3$ bestaat een afspraak waarop zo zelden een beroep wordt gedaan, dat men het niemand kwalijk kan nemen als hij de uitdrukking zonder haken niet weet te duiden.
Ik zou in de nummering van de kwadranten geen enkele moeilijkheid gezien hebben, als mij niet was gebleken, dat er van de gemaakte afspraak zo weinig gebruik gemaakt wordt, dat sommigen zich deze niet meer herinneren. Ik had oorspronkelijk geen kritiek op het mavo-examenvraagstuk, totdat mij bleek dat het geven van een verkeerd antwoord niet zeker voortkomt uit een gebrek aan inzicht. Men toetst dus, in plaats van wat men wenst te toetsen, soms iets dat veel minder waarde heeft.
Bij iedere toetsing, bij iedere examenvraag, zal men moeten nagaan, of daarin geen beroep wordt gedaan op afspraken die niet meer bindend zijn, omdat er na de laatste toepassing een te lange tijd verstreken is.
Het lijkt me echter volkomen onjuist als de samensteller van toetsen op eigen gelegenheid afspraken maakt, die hij via de toetsen tracht door te drukken.

P. M. van Hiele

Het kevervraagstuk

In Euclides 48 (1972-73), no. 9, p. 338 komt in een verslag van het ICME-congres te Exeter een door D. Pedoe behandeld vraagstuk voor: vier insecten, A_1, B_1, C_1, D_1, aanvankelijk geplaatst in de hoekpunten van een vierkant $ABCD$ met zijde a, bewegen zich gelijktijdig, eenparig en met gelijke snelheden en wel zo dat A_1 loopt in de richting A_1B_1, B_1 in de richting B_1C_1 enz. Men vraagt de baankrommen te bepalen. Kiest men de X- en de Y-as langs AB en AD dan is de differentiaalvergelijking voor de baan van A_1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{a - x - y}. \qquad (1)$$

Daarvan wordt vermeld: de oplossing kan grafisch plaatsvinden of met behulp van tabellen. Wij merken op dat (1) elementair geïntegreerd kan worden en dat de gevraagde banen bekende kromme lijnen zijn.
Door de transformatie $x = x_1 + \frac{1}{2}a$, $y = y_1 + \frac{1}{2}a$ verschuiven wij de oorsprong naar het middelpunt O van het vierkant. Dan wordt (1):

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - x_1}{x_1 + y_1}, \qquad (2)$$

of als $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{x_1}$:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (\varphi - \frac{\pi}{4}), \qquad (3)$$

die uitdrukt dat de raaklijn van de baan van A_1 steeds een hoek van 45° maakt met de voerstraal OA_1. De banen van de insecten zijn dus (congruente) *logaritmische spiralen*, met O als gemeenschappelijk asymptotisch punt.
Men kan desgewenst (2) ook wel integreren. Zij is gelijkwaardig met het stelsel

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -x_1 + y_1, \qquad (4)$$

dat met de substitutie $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $y_1 = C_2 e^{\lambda t}$ kan worden opgelost. Men vindt $\lambda = 1 \pm i$ en met de integratieconstanten A en B de algemene oplossing

$$x_1 = e^t(A \cos t + B \sin t), \quad y_1 = e^t(B \cos t - A \sin t). \qquad (5)$$

Met behulp van de beginvoorwaarden volgt daaruit de vergelijking van de baan.
Delft

O. Bottema

Sluitingen

DR. W. BURGERS

Wassenaar

Als we uitgaan van de functies f en g, gedefinieerd op IR door

$x \to \frac{1}{x}$ resp. $x \to 1 - x$

dan zien we in figuur 1 een sluiting optreden na drie overeenstemmende manipulaties $(x \neq 1)$.

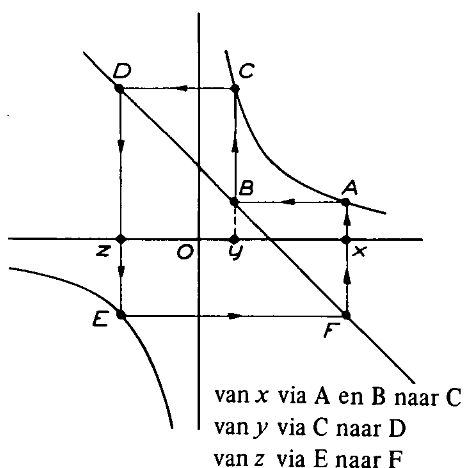


fig. 1

Men controleert gemakkelijk dat

$$y = \frac{x-1}{x} \quad \text{en} \quad z = \frac{-1}{x-1}$$

zodat $f(z) = g(x)$ waarmee de sluiting is aangetoond.
Bovendien geldt: $xyz = -1$.

Bij geschikte keuze van f en g kunnen deze sluitingen optreden na 2, 3 of meer manipulaties.
Hoe dient men deze funties dan te kiezen?

Er geldt in bovenstaand geval:

$$g(y) = f(x) \qquad \text{dus} \qquad y = g^{-1}f(x)$$
$$f(y) = g(z) \qquad \text{dus} \qquad z = g^{-1}f(y) = g^{-1}f \,.\, g^{-1}f(x)$$

en tenslotte

$$f(z) = g(x) \qquad \text{dus}$$
$$f \,.\, g^{-1}f \,.\, g^{-1}f(x) = g^{-1}f \,.\, g^{-1}f \,.\, g^{-1}f(x) = x$$

Voor de functie $h = g^{-1}f$ geldt voor een drie-sluiting dus

$$(g^{-1}f)^3\,(x) = x.$$

We beperken ons tot de functies

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{met } \Delta = ad - bc \neq 0$$

Om het rekenwerk te vereenvoudigen gaan we over op matrices.
Met enige voorzichtigheid voegen we aan

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

de matrix

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

toe.

Het samenstelling van

$$f = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{en} \quad g = \frac{px+q}{rx+s}$$

geeft n.l.

$$\frac{(ap+br)x + (aq+bs)}{(cp+dr)x + (cq+ds)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

Men bedenke dat

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{kax+kb}{kcx+kd}$$

zodat de toevoeging feitelijk op de klasse

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

plaats vindt.
De inverse f^{-1} van f is n.l.

$$\frac{dx - b}{-cx + a} \quad \leftrightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

maar

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hiermede dienen we dus rekening te houden.

De bedoeling van het onderzoek is dus de voorwaarden op te sporen waaraan de matrix A moet voldoen opdat

$$A^3 = \lambda I \text{ resp. } A^n = \lambda I$$

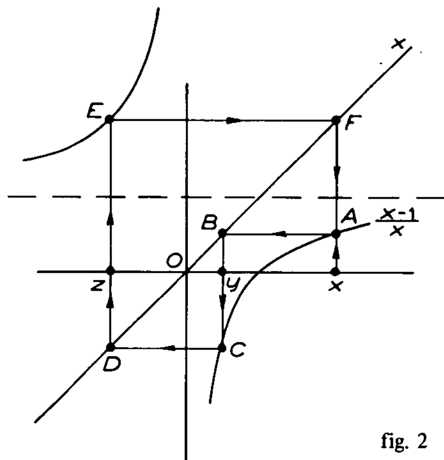


fig. 2

Opgemerkt kan worden dat we een $h(x)$ waarvoor geldt $h^3(x) = x$ (zie figuur 2) altijd kunnen schrijven als

$$h(x) = f^{-1}g\,(x)$$

waarin $g(x)$ kan worden gekozen.

Immers

$$H = X . G \quad \text{dus} \quad X = HG^{-1} \quad \text{mits } G^{-1}$$

bestaat.
Alvorens een algemene voorwaarde af te leiden geven we enkele voorbeelden.

$A^2 = \lambda I$ $\quad$ A voldoet aan de karakteristieke vergelijking:

$$A^2 - SA + \Delta I = 0$$

waarin S het spoor van A en Δ de determinant van A is, $\quad \Delta \neq 0.$

$$A^2 = SA - \Delta I$$

$$\lambda I = SA - \Delta I \rightarrow \underline{S = 0, \ \lambda = -\Delta}$$

$A^3 = \lambda I$ $\quad$ $A^3 = A(SA - \Delta I) = SA^2 - \Delta A = S(SA - \Delta I) - \Delta A =$

$$= (S^2 - \Delta)A - S\Delta I$$

dus

$$\lambda I = (S^2 - \Delta)A - S\,\Delta\, I \rightarrow \underline{S^2 = \Delta, \ \lambda = -S\Delta}$$

$A^4 = \lambda I$ $\quad$ $A^4 = A\,[(S^2 - \Delta)A - S\Delta I] = (S^2 - \Delta)(SA - \Delta I) - S\Delta A =$

$$= S\,(S^2 - 2\Delta)A - (S^2 - \Delta)\Delta I$$

$$A^4 = \lambda I$$

dus

$$\underline{S\,(S^2 - 2\Delta) = 0, \ \lambda = -(S^2 - \Delta)\Delta}$$

($S = 0$ wijst op $(A^2)^2 = \lambda I$)

Stel

$$A^n = p_n A - q_n I \,, p_1 = 1, q = 0$$

dan is

$$A^{n+1} = p_n A^2 - q_n A = p_n(SA - \Delta I) - q_n A =$$

$$= (p_n S - q_n)A - p_n\, \Delta\, I \rightarrow p_{n+1} = p_n S - q_n \ \text{ en } \ q_{n+1} = \Delta\, p_n$$

dus

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1}\, S - q_{n-1} \\ q_n = \Delta p_{n-1} \end{cases} \quad \text{of} \quad p_n - p_{n-1} S + \Delta p_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

Is

$$A^n = \lambda I$$

dan is daar

$$A^n = p_n A - q_n I$$

de voorwaarde voor een n-sluiting

$p_n = 0$, waarbij p_n aan (1) voldoet, $n \geqslant 2$.

We berekenen nu enkele p_i.

$$p_1 = 1$$
$$p_2 = S$$
$$p_3 = p_2 S - \Delta p_1$$
$$= \underline{S^2 - \Delta}$$
$$p_4 = Sp_3 - \Delta p_2$$
$$Sp_3 = S^3 - \Delta S$$
$$\Delta p_2 = \quad \Delta S$$
$$p_4 = \underline{S^3 - 2\Delta S}$$

Schrijven we alleen de coëfficiënten dan volgt een eenvoudige rekenwijze:

$p_2 = S$	1				
$p_3 = S^2 - \Delta$ ←	1	−1			
		1			
$p_4 = S^3 - 2\Delta S$ ←	1	−2			
		1	−1		
$p_5 = S^4 - 3\Delta S^2 + \Delta^2$ ←	1	−3	+1		
		1	−2		
$p_6 = S^5 - 4\Delta S^3 + 3\Delta^2 S$ ←	1	−4	+3		
		1	−3	1	
$p_7 = S^6 - 5\Delta S^4 + 6\Delta^2 S^2 - \Delta^3$ ←	1	−5	+6	−1	
		1	-4	+3	
$p_8 = S^7 - 6\Delta S^5 + 10\Delta^2 S^3 - 4\Delta^3 S$ ←	1	−6	+10	−4	
		1	− 5	+ 6	− 1
$p_9 = S^8 - 7\Delta S^6 + 15\Delta^2 S^4 - 10\Delta^3 S^2 + \Delta^4$ ←	1	−7	+15	−10	+1
		1	− 6	+10	−4
$p_{10} = S^9 - 8\Delta S^7 + 21\Delta^2 S^5 - 20\Delta^3 S^3 + 5\Delta^4 S$ ←	1	−8	+21	−20	+5

De coëfficiënten in de kolommen vormen rekenkundige rijen van opvolgende orde.

Aangezien p_n voldoet aan:

$$p_n - Sp_{n-1} + \Delta p_{n-2} = 0$$

kunnen we een algemene formule voor p_n afleiden.
Stel

$$p_n = m^x$$

dan geldt

$$m^x - S\,m^{x-1} + \Delta\,m^{x-2} = 0$$

$$m^2 - Sm + \Delta = 0$$

Noem de wortels m_1 en m_2.
Dan is

$$p_n = k\,m_1^n + l\,m_2^n$$

$$\begin{cases} n = 1 \ldots & 1 = km_1 + lm_2 \\ n = 2 \ldots & S = km_1^2 + lm_2^2 \end{cases}$$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_2 \\ S & m_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{m_2^2 - Sm_2}{m_1 m_2 (m_2 - m_1)} = \frac{-\Delta}{\Delta(m_2 - m_1)} = \frac{1}{m_1 - m_2}$$

$$l = \frac{-1}{m_1 - m_2}$$

zodat

$$p_n = \frac{m_1^n - m_2^n}{m_1 - m_2}$$

Gebruikt men de sluiting zoals aangegeven in figuur 2 dan zal

$\frac{1}{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = 0$ dus een twee-sluiting geven.

$\frac{x-1}{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S^2 = \Delta$ dus een drie-sluiting.

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{, een één-sluiting.}$$

Men herkent de functies x, $\frac{1}{x}$, $\frac{x-1}{x}$, $\frac{x}{x-1}$, $1-x$ en $\frac{1}{1-x}$

die de symmetrische groep S_3 vormen.

Verder is $p_6 = S(S^2 - \Delta)(S^2 - 3\Delta)$ zodat voor een zes-sluiting die geen twee- of drie-sluiting is geldt:

$$S^2 = 3\Delta$$

b.v.

$$\frac{x+1}{-x+2} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{met } S = 3,\ \Delta = 3.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } A^6 = -27 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_8 = S(S^2 - 2\Delta)(S^2 - \Delta\overline{2+\sqrt{2}})(S^2 - \Delta\overline{2-\sqrt{2}})$$

$$p_{10} = S(S^4 - 3\Delta S^2 + \Delta^2)(S^4 - 5\Delta S + 5\Delta^2)$$

enz.

waarbij de desbetreffende matrices rotatiegroepen genereren, mits $\Delta = 1$ of $\Delta = -1$, waarmee opnieuw de kring gesloten is.

Boekbespreking

H. Meschkowski (Hrsg.), *Didaktik der Mathematik* II, Sekundarstufe I, 297 blz., geb. DM 29,–, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1972.

In Euclides 48, p. 156 werd het eerste deel van dit leerboek van de didaktiek der wiskunde besproken. Door de verschijning van dit tweede deel is een werk ontstaan, dat ook voor de Nederlandse wiskundeleraar die zich wil verdiepen in de problemen die verband houden met de overgang van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs, van grote waarde is.

Evenals het eerste deel is ook dit tweede onderverdeeld in een vakwetenschappelijke en een didaktische afdeling. De eerste werd verzorgd door Meschkowski, de tweede door een vijftal medewerkers. Na uitvoerig te zijn ingegaan op de betekenis die de ontdekking van het irrationale voor de ontwikkeling van de wiskunde heeft gehad, noemt Meschkowski een vijftal methoden ter fundering van het begrip reëel getal:
a de methode met behulp van Cauchy-rijen;
b de sneden van Dedekind;
c de ineendozing van intervallen;
d de filtermethode;
e de methode die uitgaat van rijen binaire breuken.

Aan de laatste methode wordt uitvoerig aandacht besteed. De auteur vindt ze voor ons onderwijs verkieslijker dan die via de ineendozing van intervallen en noemt het voorlopig op de achtergrond schuiven van het limietbegrip als een der voordelen van deze methode. Het definiëren van sommen en produkten, waaraan didaktische moeilijkheden zijn verbonden, wordt uitvoerig besproken.
Meschkowski laat vervolgens uitkomen dat de formulering van meetkundige begrippen en eigenschappen in onze boeken dikwijls minder exact is dan bij algebra en analyse. Als voorbeeld bespreekt hij de gelijkheid: AB = 5 cm. Hij formuleert ernstige bezwaren tegen de introductie van een leer der grootheden in ons meetkunde-onderwijs. Hij bepleit een eerherstel van het principe van Cavalieri in de theorie van oppervlakten en inhouden. Aan het slot van zijn hoofdstuk maakt hij gewag van een stelling van Dehn, die in het begin dezer eeuw heeft bewezen dat veelvlakken die gelijke inhoud hebben niet 'zerlegungsgleich' behoeven te zijn. Zijn stelling betekende een antwoord op een uitdaging van Hilbert, die op het Internationale Congres van Wiskundigen in Parijs (1900) een drieëntwintigtal gebieden opsomde waarop in deze eeuw belangrijk werk zou kunnen worden verzet.
Hij stelde het probleem:
Es sollen zwei Piramiden von gleicher Grundfläche und Höhe gefunden werden, die nicht zerlegungsgleich sind.
Een probleem dat ook voor ons wiskunde-onderwijs van betekenis is.

De didaktische afdeling van het werk die meer dan 250 bladzijden telt is rijk van inhoud.
Helmut Stütz behandelt in het hoofdstuk 'Numerische Verfahren' volledig de gehele rekenproblematiek. Walter Popp bespreekt algebraïsche strukturen, wiskundige oordeelschema's, functies en relaties.
Bijzondere aandacht verdient de bijdrage van Bernd Wurl over meetkunde.
De problematiek hiervan ligt bij ons iets anders dan op duitse scholen, waar men in het vijfde en zesde leerjaar van het basisonderwijs de meetkundige propedeuse reeds op verantwoorde wijze tot zijn recht kan laten komen. Wurl wijst erop dat een door elkaar heen haspelen van naïef-aanschouwelijk onderwijs met een deductieve opbouw van het vak op een fiasco moet uitlopen.
Hij onderscheidt voor het onderwijs de volgende fasen:
a de concreet-aanschouwelijke, experimentele;
b de fase van de partiële ordening (Teilaxiomatisierung);

c de opbouw van een deductief systeem.
Deze indeling sluit in grote lijnen aan bij thans in Nederland gehuldigde opvattingen. Maar in zijn voorstellen tot axiomatische opbouw wijkt hij van onze inzichten af. Wurl wijst erop, dat de op het spiegelingsprincipe in de geest van Bachmann opgebouwde meetkunde de meest consequente doorvoering betekent van het Erlanger Programm van Felix Klein, die immers de meetkunde opvatte als een invariantentheorie van transformatiegroepen. Hij is echter van oordeel dat het op school eenvoudiger is met behulp van de eigenschappen van de congruentie de spiegelings-axioma's te bewijzen dan omgekeerd met behulp van de axioma's van de spiegeling de eigenschappen van de congruentie. Hij komt daardoor tot een opbouw van de meetkunde die afwijkt van die welke thans in ons land gangbaar is.

Van belang ook voor ons onderwijs is ook de inhoudsleer die door Günter Ziebegk in Wurl's hoofdstuk wordt uiteengezet. Ik acht deze paragrafen van belang, omdat heden ten dage het gevaar bestaat de meetkundige fundering die aan de afbeelding van ruimtelijke figuren in het stelsel der reële getallen ten grondslag dient te liggen enigszins te verwaarlozen.

Het laatste hoofdstuk in het boek behandelt de onderwijstechnologie ten aanzien van het wiskunde-onderwijs en is van de hand van Ursula Veit. Het verstrekt uitvoerige informatie over geprogrammeerde instructie, over leermachines, over mathematische onderwijsfilms en over video-recorders.

Kennismaking met dit tweede deel van Meschkowski's werk kan ik van harte aanbevelen.

Joh.H. Wansink

Programmierter Mathematikunterricht, onder redactie van Dr. Otto Harde en Dr. Annemarie Anke, I. I. Hempel, *Punktmengen und Geraden, die lineare Funktion,* DM 9,40;
II. I. Hempel, *Zentrische Streckung,* DM 9,80;
Hermann Schroedel Verlag, Hannover, 1970.

De firma Schroedel heeft zich reeds jarenlang verdienstelijk gemaakt door het in de handel brengen van goed verzorgde wiskunde-uitgaven gebaseerd op geprogrammeerde instructie. Reeds een paar dozijn van de hand van diverse auteurs zijn tot dusver verschenen. Voor de bespreking van enkele ervan verwijzen we naar Euclides 45, p. 316, Euclides 46, p. 36 en Euclides 47, p. 220.
De beide delen die hier onze belangstelling hebben zijn uitgevoerd in opvolgend 252 en 238 stappen in een zorgvuldig geschreven tekst en in een typografisch onvolprezen verzorging. De bruikbaarheid van de teksten moet uiteraard in de klassepraktijk blijken, maar in *Lehrerbegleithefte* vindt de belangstellende docent tal van gegevens die op de doelstellingen, het gebruik in de klasse en de evaluatie van de experimenten die aan de methode ten grondslag liggen, betrekking hebben.
Aan Nederlandse docenten die belangstelling hebben voor de geprogrammeerde instructie kan ik aanraden de hier bedoelde brochures (Schroedel 26421 en Schroedel 26424) bij de uitgever aan te vragen.
Joh.H. Wansink

Marston Morse, *Variational Analysis,* John Wiley & Sons, New York, £ 8.00.

De variatie-rekening of 'variational analysis' houdt zich bezig met problemen als het bepalen van de kortste lijn tussen 2 punten (b.v. op een oppervlak). Iets nauwkeuriger geformuleerd, men houdt zich bezig met het volgende probleem:

Zij de functie

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ en } t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1$$

gegeven. Voor welke differentieerbare kromme

$$l : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n,$$

die t_0 op x_0 en t_1 op x_1 afbeeldt, is de integraal

$$\int_{t_0}^{t_1} f(l(t), l'(t))\, dt$$

minimaal?

Dit soort van problemen werd reeds onderzocht door wiskundigen als Euler, Legendre, Jacobi etc. en speelde een belangrijke rol in de differentiaalmeetkunde, de klassieke mechanica en,in een wat gewijzigde vorm, in de veldentheorie. In 'variational analysis' wordt de klassieke theorie opgebouwd en geeft de auteur een aantal uitbreidingen van deze theorie. In het bijzonder aan aspecten betreffende 'randvoorwaarden' en 'index-stellingen' is veel aandacht besteed. De hier nagestreefde algemeenheid leidt er echter meermalen toe dat de notatie gecompliceerd en dus onoverzichtelijk is. Het zou dan ook aanbeveling verdienen naast dit boek de behandeling van de variatie rekening te lezen zoals deze voorkomt in b.v. S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall.
De belangrijkste ontwikkelingen in de variatierekening van deze eeuw, de zogenaamde globale variatierekening of Morse-theorie, komen in dit werk nog niet aan de orde, maar zullen in een tweede deel 'variational Topology' aan de orde komen.
F. Takens

E.W. Averill, *Elements of Statistics,* Uitg. John Wiley and Sons, prijs £ 5.–

Dit boek is bedoeld voor studenten, die bij hun studie een degelijke en vooral praktisch gerichte basiskennis van statistiek nodig hebben. De wiskundige voorkennis die verondersteld wordt is gering te noemen. Er wordt geen enkele stelling wiskundig bewezen en er is zelfs een appendix dat de meest elementaire rekenregels in kort bestek herhaalt.
Een kort overzicht van de inhoud:
Deel I: Descriptive statistics
Deel II: Probability, bevat o.a. verhandelingen over de binomiale verdeling, de normale kromme, steekproeven, regressie en correlatie.
Deel III: Special statistics, behandelt o.a. indexcijfers non parametrische tests en de chi-kwadraten test.
Veel opgaven en uitgewerkte voorbeelden stellen de lezer in staat zich te oefenen in de behandelde stof.
L. v.d. Zijden

Dr. P.M. van Hiele, Ir. K. Kok, H.N. Schuring, *Van A tot Z,* Werkboek der wiskunde voor de derde klas havo-vwo, *f* 22,50, Uitg. J. Muusses N.V., Purmerend.

De leerstof voor de tweede helft van het derde leerjaar is gerangschikt in twaalf hoofdstukken die een systematische cursus vormen. Daarna volgen parallel hoofdstukken met herhaling en

uitbreiding van de stof uit de systematische cursus. In een samenvatting wordt een overzicht gegeven van de stellingen en definities uit de voorafgaande pagina's.
Tot slot wordt een groot aantal repetitie vragen en opgaven verstrekt.
De moeilijkheidsgraad lijkt mij voor havoleerlingen hoog. In wiskundig opzicht degelijk werk. De wijze van druk verklaart niet de m.i. hoge prijs.
L. v.d. Zijden

D. Van Dalen and A.F. Monna, *Sets and integration, An outline of the development,* Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, VIII + 162 blz., *f* 43,45.
In de eerste helft van het boek schrijft Van Dalen over 'Set theory from Cantor to Cohen'. Uiteraard is de ontwikkeling van de verzamelingenleer geschetst met als hoofdpunten het intuïtieve uitgangspunt van Cantor, de axiomatisering door Zermelo en Fraenkel, de verfijnde axiomatiek van Von Neumann waarbij klassen ingevoerd worden (een klasse heeft verzamelingen als elementen, maar kan niet zelf element zijn) en de moderne onafhankelijkheidsbewijzen van Cohen.
De auteur heeft zich in zijn stofkeuze weten te beperken, waardoor een goed leesbaar geheel ontstaan is. Hij tracht vermelde resultaten in hoofdlijnen te funderen en slaagt erin moeilijke redeneringen daardoor toch toegankelijk te maken. Bij de behandeling van Cohen heeft hij zich tot aanduidingen moeten beperken.
Een bijzonder fraai stuk werk, waar ook diegenen die in de materie zich niet thuis voelen, veel wetenswaardigs in zullen ontdekken.
De tweede helft van het boek bestaat uit een verhandeling van Monna getiteld 'The integral from Riemann to Bourbaki'. We maken eerst kennis met het integraalbegrip van de Oude Grieken. Vervolgens zien we het huidige integraalbegrip geboren worden bij Leibniz en Newton. Riemann en Lebesgue integraal worden uitvoerig besproken en hun voor- en nadelen worden vergeleken. Voor niet-ingewijden, zoals uw recensent, wordt het nu moeilijker. Verschillende modernere integraaldefinities passeren de revue. De auteur definieert daarbij op heldere wijze elk begrip, dat hij nodig heeft. Het spreekt welhaast vanzelf, dat hij in dit korte bestek ervan af moet zien de resultaten die men met de verschillende integraaldefinities bereiken kan, af te leiden. Toch weet hij de lezer een goed overzicht te geven over hetgeen essentieel is. We zien het integraalbegrip algemener worden. Het wordt een toevoeging van een reëel getal aan een reële functie die op de een of andere puntverzameling gedefinieerd is, een functionaal dus.
Ook de lectuur van het door Monna geschreven deel kan ik ten zeerste aanbevelen.
P.G.J. Vredenduin

LEGPUZZEL

Zie Euclides, 48, p. 392 (vorig nummer)
Mijn volgorde was:
W, C, X, P, I, E, H, Q, A, K, J, F, Y, T, O, V, U, R, N, B, D, S, L, G, Z.
Het stukje M kan op elke plaats na W staan; Z kan ook een paar letters eerder staan.

JvD

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

School Science and Mathematics, LXXI^{6}-LXXII^{8}; november 1971-November 1972.

L. H. Kanter, A note on the optical property of the hyperbola;
L. T. Hall jr., The prediction of success in mathematics courses;
J. A. Reed, Integrating the teaching of science and mathematics in the elementary school;
J. Gipson, Use of environment and discovery in teaching decimals to second grade children.

Th. McGannon, Creativity and mathematics education;
R. E. Johnson, Mathematics: an emerging laboratory science strengthening the bonds;
W. Rouse, The mathematics laboratory: misnamed, misjudged, misunderstood.

N. Maertens and J. Johnston, Effects of arithmetic homework upon the attitudes and achievement of pupils;
S. S. Sachdev, The curriculum development workshop of the developing colleges;
M. F. Willerding, Figurate numbers;
D. Rappaport, Research - the new panacea.

C. B. Read, What is an abundant number?
J. J. Roberge, Recent research on the development of children's comprehension of deductive reasoning schemes.

J. D. Gawronski, An informal approach to high school geometry;
J. E. Higgins, An investigation of the effects of non-decimal numeration instruction on mathematical understanding;
R. E. Wolfe, Strategies of justification used in the classroom by teachers of secondary school mathematics;
R. L. Shrigley and C. R. Trueblood, Non-verbal problem setting: a vehicle for the correlation of science and mathematics.

Th. J. Cooney and K. B. Henderson, Structuring knowledge in mathematics and science;
J. D. Austin and W. Asher, An alternative interpretation of an evaluation of a modern math. program;
F. Vest, Mapping models of operations on whole numbers;
D. R. Duncan and B. H. Litwiller, Guidelines for the evaluation of student teachers in mathematics.

L. Collister, Pictorial displays on the computer;
J. E. Forbes, Course content in mathematics: our cultural heritage versus current relevancy;
D. B. Lloyd, Arithmetic versus algebra;
L. W. Watson, Stating broad goals of mathematics education.

In memoriam Cecil B. Read;
J. A. West, The case for metric units;
H. O. Anderson, The supervisor as a facilitator of self-education;
L. Macaron, Mathematical induction.

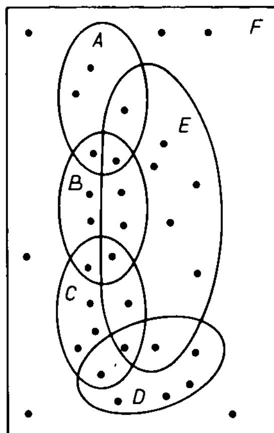
Fl. Nordland en anderen, A practical approach to an audial-tutorial system;
S. Avital, Induction and deduction in a unit of early algebra;
R. Hunkler and W. G. Quast, Improving the mathematics attitude of prospective elementary school teachers;
A. R. Amir-Moez, The derivative doesn't always work;
P. A. Lindstrom, Some curve sketching exercises.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaersheuvel 73, Oosterbeek.

298. Hoeveel principieel verschillende netwerken van een kubus zijn er mogelijk?

299. In onderstaande figuur ziet men zes verzamelingen; de stippen stellen hun elementen voor. *P* en *Q* spelen het volgende spel. *P* neemt een element weg, daarna neemt *Q* een element weg, daarna *P* enz. Zodra iemand van een verzameling het laatste element wegneemt, krijgt hij een punt. Welke strategie leidt voor *P* tot winst? (K. Popp)



Oplossingen:

296. Hoeveel ogen kan men te zien krijgen, als men een dobbelsteen in een willekeurige stand houdt?
Elk aantal van 1 tot en met 15, met uitzondering van 13.
Op welk aantal ogen is de kans maximaal?
Een waanzinnige vraag. Als men geen kansverdeling geeft betreffende de standen van de dobbelsteen, is deze vraag niet te beantwoorden. U begrijpt, dat mevr. Dijkstra deze vraag dan ook niet gesteld heeft.

297. Het positieve natuurlijke getal n is tientallig geschreven. De som van de kwadraten van de cijfers van n noemen we n_1, de som van de kwadraten van de cijfers van n_1 noemen we n_2, enz. We bewijzen, dat de rij getallen $n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ uitmondt in een repeterende cyclus van acht getallen of in louter 1'en.
We bewijzen eerst, dat voor $n \geqslant 100$ geldt $n_1 < n$. Voor getallen van drie cijfers abc is gemakkelijk in te zien, dat voor elke a, b en c geldt

$$a^2 + b^2 + c^2 < 100a + 10b + c$$

Voor getallen van meer dan drie cijfers is de juistheid van $n_1 < n$ trivaal.

Hieruit volgt:
a. de rij getallen n, n_1 n_2, . . . zal voor elke n uitmonden in een cyclus;
b. om na te gaan welke cycli mogelijk zijn, kunnen we volstaan met de getallen $n \leqslant 99$ te onderzoeken.
(Voor andere talstelsels gelden analoge resultaten.)
Nu blijken alle getallen kleiner dan 100 en groter dan 4 op de duur een uitkomst te leveren die kleiner is dan het oorspronkelijke getal. De onderstaande tabel laat dit zien:

99	41	79	10x	59	37	39	37	19	1x
98	42	78	11	58	42	38	20	18	4
97	10x	77	42	57	37	37	20	17	4
96	51	76	42	56	37	36	17	16	4
95	37	75	74	55	50	35	34	15	4
94	10x	74	65	54	41	34	25	14	4
93	90	73	58	53	34	33	18	13	10x
92	85	72	51	52	29	32	13	12	5
91	82	71	50	51	26	31	10x	11	2
90	81	70	49x	50	25	30	9	10	1x
89	42	69	51	49	10x	29	20	9	4
88	69	68	1x	48	29	28	1x	8	4
87	11	67	42	47	37	27	25	7	1x
86	1x	66	51	46	29	26	16	6	4
85	42	65	61	45	41	25	20	5	4
84	80	64	52	44	32	24	20	4	
83	73	63	42	43	25	23	13x	3	4
82	68x	62	40	42	20	22	8	2	4
81	65	61	37	41	17	21	5	1	
80	64	60	36	40	16	20	4		

Zodat er twee mogelijkheden zijn:

men stuit op de cyclus 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4

of

men krijgt een serie 1'en (in de tabel zijn de betreffende getallen met x gemerkt).

Opmerking: Het kan nog zuiniger. Alle getallen waarvan het eerste cijfer groter is dan het tweede, kunnen we weglaten. Levert b.v. 59 op den duur een kleinere uitkomst, dan 95 zeker.

Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen en Techniek

De najaarsvergadering van het genootschap zal worden gehouden tijdens het 7e Benelux Kongres voor de Geschiedenis der Wetenschappen te Gent op 19 oktober 1973 ('s avonds: begroeting en kennismaking), 20 oktober (wetenschappelijke vergadering en ledenvergadering) en 21 oktober (ontvangst, museumbezoek).
Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen en toezending van het programma wenden tot de secretaris, Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

INHOUD